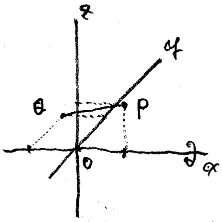
理系発展問題演習 12. 体積⑵

[1]

(1) 線分PQ上の点をR(x, y, z)とすると



$0\leqq k\leqq 1$

$\vec{OR}=\vec{OQ}+k\vec{QP}$ (k:実数)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

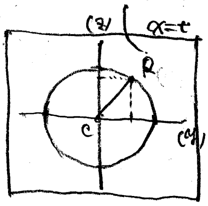
$$\therefore \begin{cases}x=2k-1\\y=-k+1\\z=k\end{cases}$$

$x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ のとき

$2k-1=t \quad \therefore k=\dfrac{t+1}{2}$

$\therefore \left(t,\ \dfrac{-t+1}{2},\ \dfrac{t+1}{2}\right)$

曲面Sで囲まれる立体の $x=t$ における断面の断面積 $S(t)$ は



$$S(t)=\pi CR^2$$
$$=\pi\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{t^2+1}{2}\pi$$

求める体積Vは

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt$$
$$=\pi\int_0^1(t^2+1)\,dt$$
$$=\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\frac{4}{3}\pi$$

(2) 曲面Sを $y=0$ で切ったときの曲線は

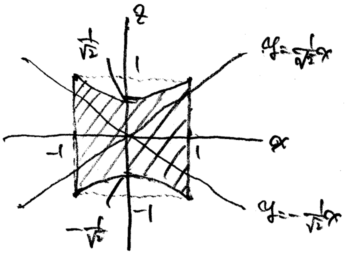
$x=t$ のとき、 $(t,0,0)$ と $\left(t,\frac{1-t}{2},\frac{t+1}{2}\right)$ の距離

$$z=\pm\sqrt{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}$$

$$z^2=\frac{t^2+1}{2}$$

t を消去して $\left(x^2-\dfrac{z^2}{\frac{1}{2}}=-1\right)$

$$z^2=\frac{x^2+1}{2} \quad \therefore x^2-2z^2=-1$$



(3) $I=\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$

$t=\dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$ とおくと $\dfrac{dt}{ds}=\dfrac{e^s+e^{-s}}{2}$

$t:0\to 1$

$s:0\to\log(1+\sqrt{2})$

$e^s-e^{-s}=2t$

$$\sqrt{t^2+1}=\sqrt{\frac{(e^s-e^{-s})^2}{4}+1}=\frac{e^s+e^{-s}}{2}$$

$$I=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\frac{e^s+e^{-s}}{2}\cdot\frac{e^s+e^{-s}}{2}\,ds$$

$3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$, $3-2\sqrt{2}=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$

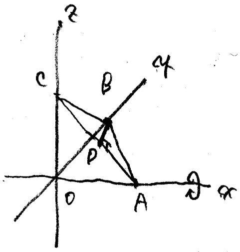
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}(e^{2s}+e^{-2s}+2)\,ds=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{2s}}{2}+\frac{e^{-2s}}{-2}+2s\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$$

(2)の曲線の面積Sは

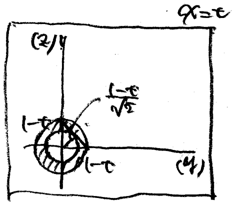
$$S=2\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}}\,dx$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$=2+\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$$

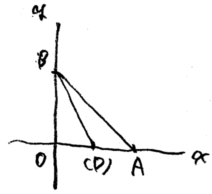
[2]



求める立体を $x=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切った断面積 $S(t)$ は

(i) $\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ のとき





$$S(t)=\pi(1-t)^2-\pi\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)^2\pi$$

(ii) $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

BD上の点をP(x, y, z)とすれば

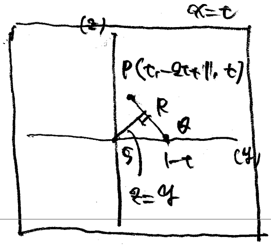
$\vec{OP}=\vec{OB}+k\vec{BD}$ (k:実数)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}x=k\\y=-2k+1\\z=k\end{cases}$$

$x=t$ のとき

$(t,\ -2t+1,\ t)$



直線PQは

$z=-(y-(1-t))$　　SR : $z=y$　(SR⊥PQ)

$R\left(t, \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$

$-2t+1 \leqq \frac{1-t}{2}$ となるとき $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$　SからPQに垂線が下ろせる

$\geqq$　　　　　　$0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$　下ろせない

(ア) $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき

$S(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2\pi$

(イ) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$ のとき

$S(t)=\pi\{(1-t)^2-\{(-2t+1)^2+t^2\}\}$　($5t^2-4t+1$)

$=\pi(-4t^2+2t)$

求める体積Vは

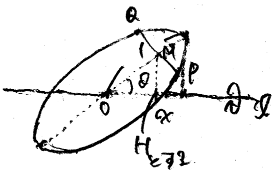
$V=\int_0^{\frac{1}{3}}\pi(-4t^2+2t)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{1}{2}(1-t)^2\pi\,dt$　($(t-1)^2$)

$=\pi\left[-\frac{4}{3}t^3+t^2\right]_0^{\frac{1}{3}}+\frac{\pi}{2}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_{\frac{1}{3}}^{1}$

$=\frac{5}{81}\pi+\frac{4}{81}\pi=\frac{\pi}{9}$ //

$\boxed{3}$

(1) $-\cos\theta \leqq \alpha \leqq \cos\theta$ //

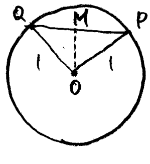


(2) $x=\alpha$ $(-\cos\theta \leqq \alpha \leqq \cos\theta)$ について

$OM\cos\theta=\alpha$

$\therefore OM=\frac{\alpha}{\cos\theta}$　$MH=\alpha\tan\theta$

$PM=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\cos^2\theta}}$



$a(\alpha)=\alpha\tan\theta$

$b(\alpha)=\sqrt{\alpha^2\tan^2\theta+\left(1-\frac{\alpha^2}{\cos^2\theta}\right)}$　$(1+\tan^2\theta)\alpha^2$

$=\sqrt{1-\alpha^2}$ //

(3) 求める体積Vは

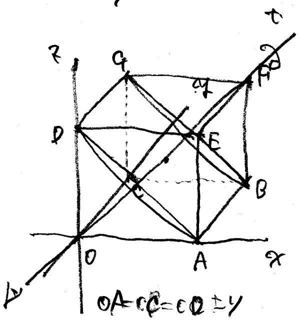
$V=2\int_0^{\cos\theta}\pi\{(1-\alpha^2)-\alpha^2\tan^2\theta)\}\,d\alpha$

$=2\pi\int_0^{\cos\theta}\{1-(1+\tan^2\theta)\alpha^2\}\,d\alpha$

$=2\pi\left[\alpha-\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\alpha^3}{3}\right]_0^{\cos\theta}$

$=2\pi\left(\cos\theta-\frac{\cos\theta}{3}\right)=\frac{4\cos\theta}{3}\pi$ //

$\boxed{4}$

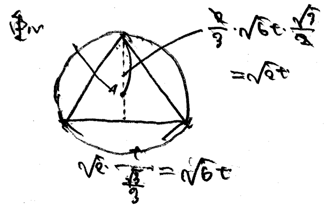


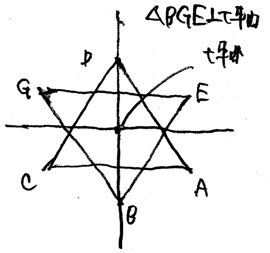
OA=CC=CQ より
△ACD⊥t軸
△BGE⊥t軸

図のようにt軸をおく
求める立体の体積は対称性より
$0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ で考えて2倍すればよい

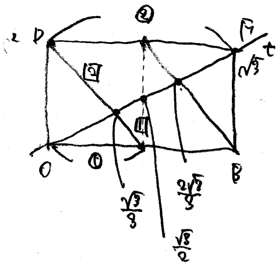
$t=t$ の断面積を $S(t)$ とする

(i) $0 \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

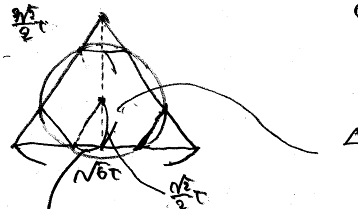




$S(t)=\pi(\sqrt{2}t)^2=2\pi t^2$



(ii) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき



△ACDの高さ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}t-\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}t}\cdot\sqrt{6}t=\frac{\sqrt{6}}{2}t-\sqrt{6}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}t$

$S(t)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}t\right)^2\right\}$

$=(2t^2-2\sqrt{3}t+2)\pi$

求める体積Vは

$V=2\left\{\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}} 2\pi t^2 dt + \int_{\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{2}} (2t^2-2\sqrt3 t+2)\pi dt\right\}$

$=2\left\{2\pi\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}} t^2 dt + 2\pi\int_{\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{2}} (1-\sqrt3 t) dt\right\}$

$=2\left\{2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt3}{2}} + 2\pi\left[t-\frac{\sqrt3}{2}t^2\right]_{\frac{\sqrt3}{3}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\right\}$

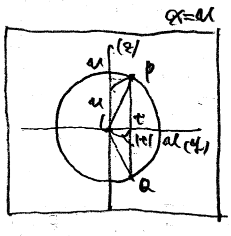
$=2\left\{\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt3}{8}+2\pi\cdot\frac{\sqrt3}{6}-\sqrt3\pi\cdot\frac{5}{12}\right\}$

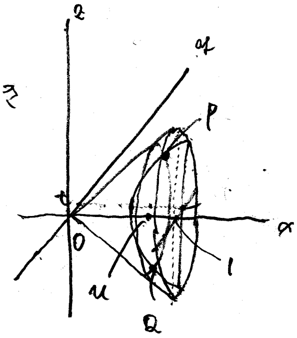
$=2\left\{\frac{\sqrt3}{4}\pi+\frac{\sqrt3}{3}\pi-\frac{5\sqrt3}{12}\pi\right\}=\frac{\sqrt3}{3}\pi$ //

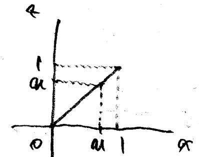
$\boxed{5}$

$y=t\ (-1\le t\le 1)$で切ったときの断面を図で分析して求める

$x=u$で切ると$(0\le u\le 1)$







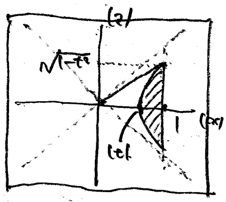
$z=\pm\sqrt{u^2-t^2}$

uを消去して

$z^2=x^2-t^2$

$\therefore x^2-z^2=t^2$ $\begin{cases} t=0\text{のときは 2直線 } z=\pm x \\ t\ne0\ \text{〃 双曲線 } \dfrac{x^2}{t^2}-\dfrac{z^2}{t^2}=1 \end{cases}$

求める立体を$y=t$で切ったときの断面積$S(t)$は



i) $t=0$のとき

$S(t)=\pi(\sqrt2)^2=2\pi$

ii) $t\ne0$のとき

$S(t)=\pi\{(1-t^2+1)-t^2\}$

$=2\pi(1-t^2)$

i, ii より

$S(t)=2\pi(1-t^2)$

よって求める体積Vは

$V=\int_{-1}^{1}2\pi(1-t^2)dt$

$=4\pi\int_0^1(1-t^2)dt$

$=4\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$

$=\frac{8\pi}{3}$ //

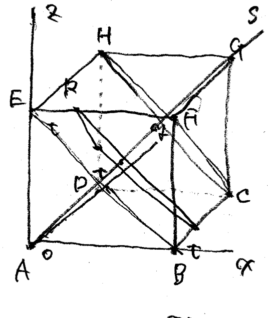
$\boxed{6}$

図のように対角線AGをs軸とすると△PQRは正三角形なので外心が必ずs軸を通る

△BDEの外心Sをs=0とし

△CHF 〃 をTとすると

$ST=\frac{\sqrt3}{3}$より $s=\frac{\sqrt3}{3}t$



とする

△PQRの面積S(t)は

$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t^2+1^2+(1-t)^2}\right)^2\cdot\sin60°$

$=\frac{\sqrt3}{4}(2t^2-2t+2)=\frac{\sqrt3}{2}(t^2-t+1)$

求める体積Vは

$V=\int_0^{\frac{\sqrt3}{3}}S(t)ds$

$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt3}{3}$ $\quad s:0\to\frac{\sqrt3}{3}$

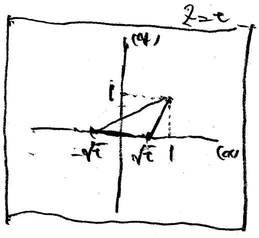
$\quad t:0\to1$

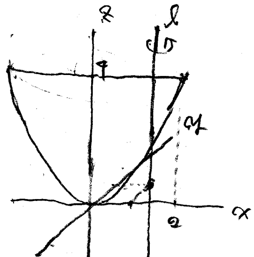
$V=\int_0^1\frac{\sqrt3}{2}(t^2-t+1)\cdot\frac{\sqrt3}{3}dt$

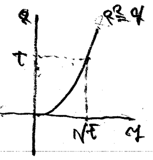
$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+t\right]_0^1=\frac{5}{12}$ //

$\boxed{7}$

(1) i) $0\le t\le1$のとき







最大値 $\sqrt{(1+\sqrt t)^2+1}=\sqrt{t+2\sqrt t+2}$

〃小 $\sqrt{(1-\sqrt t)^2+1}=\sqrt{t-2\sqrt t+2}$ //

ii) $1<t\le4$のとき

最小値 1

最大値 $\sqrt{t+2\sqrt t+2}$ //

(2) i) $0\le t\le1$のとき

$S(t)=\pi\left(\sqrt{t+2\sqrt t+2}\right)^2-\pi\left(\sqrt{t-2\sqrt t+2}\right)^2$

$=4\pi\sqrt t$

ii) $1<t\le4$のとき

$S(t)=\pi\left(\sqrt{t+2\sqrt t+2}\right)^2-\pi\cdot1^2=(t+2\sqrt t+1)\pi$

(3) $V=\int_0^1 4\pi\sqrt{t}\,dt+\int_1^4(t+2\sqrt{t}+1)\pi\,dt$

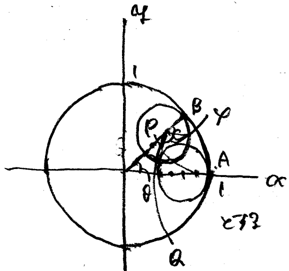
$=4\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\pi\left[\frac{t^2}{2}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_1^4$

$=\frac{8}{3}\pi+\pi\left(\frac{15}{2}+\frac{28}{3}+3\right)$

$=\frac{45}{2}\pi$ //

$\boxed{8}$ $\boxed{訂正}$ (1) θの中心

(1) $\vec{OP}=\vec{OC}+\vec{CP}$



$\vec{OC}=\begin{pmatrix}(1-r)\cos\theta\\(1-r)\sin\theta\end{pmatrix}$

$\vec{CP}=\begin{pmatrix}a\cos(\theta-\varphi)\\a\sin(\theta-\varphi)\end{pmatrix}$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}$ より

$r\varphi=\theta$ ∴ $\varphi=\frac{\theta}{r}$

P(x, y)とすると

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-r)\cos\theta+a\cos(1-\frac{1}{r})\theta\\(1-r)\sin\theta+a\sin(1-\frac{1}{r})\theta\end{pmatrix}$ //

(2) Pが元の位置に戻るとき

Pがn回転してm周目に戻ったとすると

$n\cdot 2\pi r=m\cdot 2\pi\cdot 1$

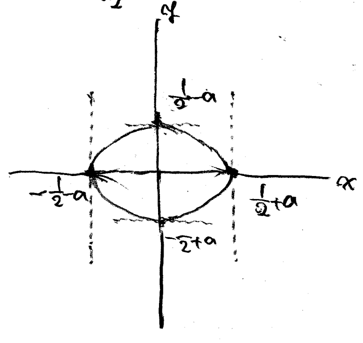
∴ $r=\frac{m}{n}$ (有理数)

であればよい

(3) $r=\frac{1}{2}$のとき

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\theta+a\cos(-\theta)\\\frac{1}{2}\sin\theta+a\sin(-\theta)\end{pmatrix}$

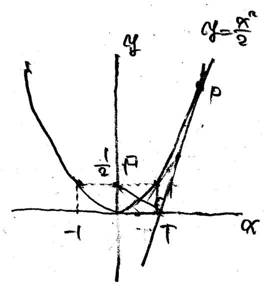
$=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2}+a)\cos\theta\\(\frac{1}{2}-a)\sin\theta\end{pmatrix}$ (だ円)



//

$\boxed{9}$

(1) $f(x)=\frac{x^2}{2}$とおく $f'(x)=x$



Pにおける接線は

$y-\frac{u^2}{2}=u(x-u)$

∴ $y=ux-\frac{u^2}{2}$

このとき $T(\frac{u}{2},0)$

$\vec{TP}=\begin{pmatrix}1\\u\end{pmatrix}$, $\vec{TF}=\begin{pmatrix}-\frac{u}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$であるから

$\vec{TP}\cdot\vec{TF}=1\cdot(-\frac{u}{2})+u\cdot\frac{1}{2}=0$

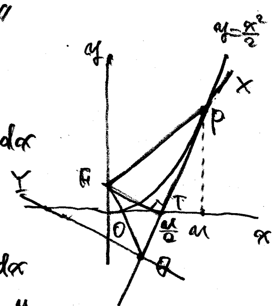
より題意は示された □

(2) $FT=\frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}$ //

(3) $\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ //

(4) $s(u)=\int_0^u\sqrt{1+x^2}\,dx$



$=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^u-\int_0^u\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=u\sqrt{1+u^2}-\int_0^u\sqrt{1+x^2}dx$

$+\int_0^u\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$2s(u)=u\sqrt{1+u^2}+\left[\log(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^u$

∴ $s(u)=\frac{1}{2}(u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2}))$

f $\sqrt{1+x^2}$ g x

f' $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ g' 1

$QT=s(u)-TP$ ($\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}$)

$=\frac{1}{2}\{u\sqrt{1+u^2}+\log(u+\sqrt{1+u^2})\}-\sqrt{(\frac{u}{2})^2+(\frac{u^2}{2})^2}$

$=\frac{1}{2}\log(u+\sqrt{1+u^2})$ //

(5) 図のようにX軸, Y軸をとるとFは

$\begin{cases}X=\frac{1}{2}\log(u+\sqrt{1+u^2})\cdots①\\Y=\frac{1}{2}\sqrt{u^2+1}\cdots②\end{cases}$

①より

$2X=\log(u+\sqrt{1+u^2})$

$e^{2X}=u+\sqrt{1+u^2}$

$e^{2X}-u=\sqrt{1+u^2}$

$(e^{2X}-u)^2=1+u^2$, $u\leqq e^{2X}$

$e^{4X}-2ue^{2X}+u^2=1+u^2$

$2ue^{2X}=e^{4X}-1$

∴ $u=\frac{e^{4X}-1}{2e^{2X}}=\frac{1}{2}(e^{2X}-\frac{1}{e^{2X}})$

②より

$Y=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2X}+\frac{1}{e^{2X}})^2}$

$=\frac{1}{4}(e^{2X}+\frac{1}{e^{2X}})$

よって $(x\geqq0)$ $y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$ //