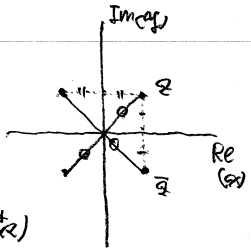
標準問題演習 17. 複素数平面(1)

$\boxed{1}$



ア. $\bar{z}$

イ. $-\bar{z}$

ウ. $-z$

エ. $z=i\bar{z}$

$z=x+yi$ とすると (x, y: 実数)

$\bar{z}=x-yi$ より

$x+yi=i(x-yi)$

$x+yi=xi+y$

$(x-y)+(y-x)i=0$

∴ $\begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases}$ ∴ $y=x$

$z=a+bi$ (複素数平面上では (a,b)) と

$y=x$ に関して対称な点は (b,a) すなわち $b+ai$

$z=a+bi$

$iz=-b+ai$

$\overline{iz}=-b-ai$

$-\overline{iz}=b+ai$ ∴ $b+ai=i\bar{z}$ //

オ. iz

<point>

1. 複素数平面

$\boxed{2}$

(1) α, β, γ が同一直線上にあるとき

$\alpha-\gamma=k(\beta-\gamma)$ (k: 実数)

と表せる.

$-2+(x-2)i=k(2+i)$

∴ $\begin{cases} -2=2k \cdots ① \\ x-2=k \cdots ② \end{cases}$

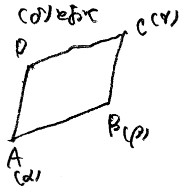
①より $k=-1$

②より $x=1$ //

(2) $\delta=(\alpha-\beta)+(\gamma-\beta)+\beta$

$=(-2+8i)+(-4+5i)+(3-7i)$

$=-3+6i$ //



<point>

1. 複素数の定数倍

和

の複素数平面上での意味.

$\boxed{3}$

I. $z^2+z+3=0$ の解の1つを z とすると

もう1つの解は $\bar{z}$ である

解と係数の関係より

$z\bar{z}=3$

$|z|^2=3$ ∴ $|z|=\sqrt{3}$ //　　← $|z|^2=z\bar{z}$

II. $|z|=1$ となる解をもつとき

$|z|^2=1$

$z\bar{z}=1$

$k=1$ // ← 解と係数の関係.

III (1) $\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2=\dfrac{z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}}{2}$

$=\dfrac{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2}{2}$

∴ $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2=2\,\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2$ //.

(2) $(|z_1|+|z_2|)^2-|z_1+z_2|^2 \geqq 0$ を示せばよい

左辺 $=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2-(z_1+z_2)(\overbrace{\overline{z_1+z_2}}^{\bar{z}_1+\bar{z}_2})$

$=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2-(|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2)$

$=2|z_1||\bar{z}_2|-2\,\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2$

$=2(|z_1\bar{z}_2|-\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2) \geqq 0$ //

($z_1\bar{z}_2=a+bi$ とすると $|z_1\bar{z}_2|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\mathrm{Re}\, z_1\bar{z}_2=a$)

IV.

$\alpha+\beta+1=0$ より

$\alpha+\beta=-1$

$\overline{\alpha+\beta}=-1$

∴ $\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-1$

$|\alpha|=1$ より

$|\alpha|^2=1$

$\alpha\bar{\alpha}=1$ ∴ $\bar{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$

同様に $\bar{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$ より

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=-1$

$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-1$ ∴ $\alpha\beta=-(\alpha+\beta)=1$

よって

$\alpha^2+\beta^2+1=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1$

$=(-1)^2-2\cdot1+1=0$ //

V. (1) $|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=|\alpha|^2+\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta+|\beta|^2$

$=8+\alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta$

ここで

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=|\alpha|^2-\alpha\bar\beta-\bar\alpha\beta+|\beta|^2$

$4=8-\alpha\bar\beta-\bar\alpha\beta$ $\quad\therefore\ \alpha\bar\beta+\bar\alpha\beta=4\cdots①$

より

$|\alpha+\beta|^2=8+4=12$

$\therefore\ |\alpha+\beta|=2\sqrt3$ //

(2) ①の両辺に$\alpha\beta$をかけて

$|\beta|^2\alpha^2+|\alpha|^2\beta^2=4\alpha\beta$

$4\alpha^2+4\beta^2=4\alpha\beta$

$\therefore\ \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0\cdots②$

両辺に$\alpha+\beta$をかけて

$\alpha^3+\beta^3=0$

$\beta\neq0$より

$\dfrac{\alpha^3}{\beta^3}+1=0\quad\therefore\ \dfrac{\alpha^3}{\beta^3}=-1$ //

(3) ②から$\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$より

$|\alpha^2+\beta^2|=|\alpha\beta|$

$=|\alpha||\beta|=4$ //

<point>

1. 共役複素数の性質
2. 複素数の絶対値の性質

$\boxed{4}$

I $\mathrm{Re}\dfrac{1}{1-z}=\dfrac12\left(\dfrac{1}{1-z}+\overline{\dfrac{1}{1-z}}\right)$

$=\dfrac12\left(\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{1-\bar z}\right)$

$=\dfrac12\cdot\dfrac{(1-\bar z)+(1-z)}{(1-z)(1-\bar z)}$

$=\dfrac12\cdot\dfrac{2-z-\bar z}{1-z-\bar z+\cancel{z\bar z}\,1}=\dfrac12$ //

II (1) $\bar w=w$より

$\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=\dfrac{z}{1+z^2}$

$\dfrac{\bar z}{1+(\bar z)^2}=\dfrac{z}{1+z^2}$

$\bar z(1+z^2)=z(1+(\bar z)^2)$

$\bar z+|z|^2z=z+|z|^2\bar z$

$|z|^2(\bar z-z)-(\bar z-z)=0$

$(|z|^2-1)(\bar z-z)=0$

$\therefore\ |z|^2=1,\ \bar z=z$

$\therefore\ a^2+b^2=1,\ b=0$ //

(2) $\bar w=-w,\ w\neq0$より

$\overline{\left(\dfrac{z}{1+z^2}\right)}=-\dfrac{z}{1+z^2},\ \dfrac{z}{1+z^2}\neq0$

$\bar z(1+z^2)=-z(1+(\bar z)^2),\ z\neq0$

$\bar z+|z|^2z=-z-|z|^2\bar z,\ z\neq0$

$|z|^2(z+\bar z)+z+\bar z=0,\ z\neq0$

$(|z|^2+1)(z+\bar z)=0,\ z\neq0$

$\therefore\ \bar z=-z,\ z\neq0$

$\therefore\ a=0,\ b\neq0$ //

III. $z+\dfrac1z$が実数より

$\overline{z+\dfrac1z}=z+\dfrac1z$

$\bar z+\dfrac1{\bar z}=z+\dfrac1z$

$|z|^2\bar z+z=|z|^2z+\bar z$

$|z|^2(\bar z-z)-(\bar z-z)=0$

$(|z|^2-1)(\bar z-z)=0$

$\therefore\ |z|^2=1,\ \bar z=z.$

(i) $|z|^2=1$のとき

$|z-1|=1$より

$|z-1|^2=1$

$(z-1)(\overline{z-1})=1$

$z\bar z-z-\bar z+1=1\cdots①$

$\therefore\ z+\bar z=1\qquad \mathrm{Re}\,z=\dfrac12\qquad\therefore\ z=\dfrac12\pm\dfrac{\sqrt3}{2}i$ //

(ii) $\bar z=z$のとき

zは実数

①より

$z^2-2z=0\quad\therefore\ z=0,\ 2$ //

IV. $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ より

$|\alpha|^2=1,\ |\beta|^2=1,\ |\gamma|^2=1$

$\therefore\ \alpha\bar{\alpha}=1,\ \beta\bar{\beta}=1,\ \gamma\bar{\gamma}=1$

$\therefore\ \bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\ \bar{\beta}=\frac{1}{\beta},\ \bar{\gamma}=\frac{1}{\gamma}\quad(\alpha,\beta,\gamma\neq 0)$

$$\overline{\left(\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}\right)}=\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=\alpha\beta\gamma\cdot\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\cdot\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}$$

より題意は示された

<point>

1. 実部 虚部
2. 実数条件、純虚数条件

$\boxed{5}$

I. (1) $1+i=\overset{ア}{\boxed{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)}}$

$1+\sqrt{3}i=\overset{イ}{\boxed{2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}}$

(2) $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)}$

$=\overset{ウ}{\boxed{\sqrt{2}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)}}$

ここで

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{2}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i}{2}$$

より

$$\frac{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}=\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ$$

よって

$$\cos 15^\circ=\overset{エ}{\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}},\quad \sin 15^\circ=\overset{オ}{\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$$

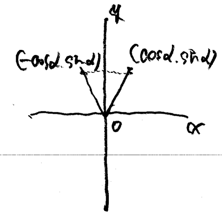
(3) $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}-(1+i)\right|=\left|\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-3+\sqrt{3}}{2}i\right|$

$=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$

$=\frac{4-2\sqrt{3}+3(4+2\sqrt{3})}{4}=\boxed{4+\sqrt{3}}$

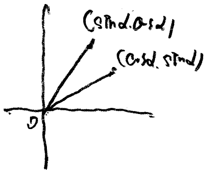
II. (1) $-\cos\alpha+i\sin\alpha$

$=\cos(180^\circ-\alpha)+i\sin(180^\circ-\alpha)$ //



(2) $\sin\alpha+i\cos\alpha$

$=\cos(90^\circ-\alpha)+i\sin(90^\circ-\alpha)$ //



(3) $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ とおくと

$|z|=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$

$=\sqrt{2+2\cos\alpha}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ より

$$z=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\frac{1+\cos\alpha}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}+i\frac{\sin\alpha}{2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}\right)$$

(k:整数)

i) $\cos\frac{\alpha}{2}>0$ すなわち $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<\frac{\alpha}{2}<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$

$(4k-1)\pi<\alpha<(4k+1)\pi$ のとき

$$z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}+i\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cancel{2\cos\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

ii) $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ すなわち $(4k+1)\pi<\alpha<(4k+3)\pi$ のとき

$$z=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(180^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(180^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$ //

<point>

1. 極形式
2. 複素数の積と商

$\boxed{6}$

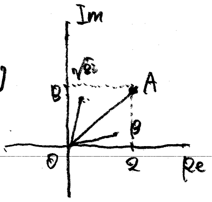
(1) 求める複素数αは

$\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)(4-2\sqrt{3}i)$

$=\frac{1}{\cancel{2}}(\sqrt{3}+i)\cdot\cancel{2}(2-\sqrt{3}i)$

$=3\sqrt{3}+5i$ //

(2) B(β) とすると



$\beta = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(2+\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}+5i)$

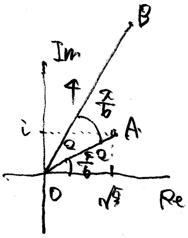
または

$\beta = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}(2+\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{3}-i)(2+\sqrt{3}i)$

$= \frac{1}{4}(3\sqrt{3}+i)$ //

(3) $z = \sqrt{3}+i$



$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

△OAB の面積 S は

$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \sin\frac{\pi}{6} = {}^{ア}\boxed{2}$

C(γ) とすると

$\gamma = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \boxed{-2+2\sqrt{3}i}$

または

$\gamma = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4(\cos 0 + i\sin 0) = \boxed{4}$

<point>

1. 複素数平面上での複素数の積と商の意味

$\boxed{7}$

(1) $\gamma - \alpha = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)(\beta - \alpha)$

$\gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)(-1-\sqrt{3}i) + (-1+2\sqrt{3}i)$

$= -2i + (-1+2\sqrt{3}i) = -1 + (2\sqrt{3}-2)i$ //

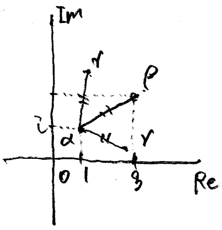
(2) $\beta - \alpha = \{\cos(-60^\circ) + i\sin(-60^\circ)\}(\gamma - \alpha)$

$\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\{(1+\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i\} + (1+6i)$

$= \frac{1}{2}\{(1+\sqrt{3}) + \sqrt{3}(-1+\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i - \sqrt{3}(1+\sqrt{3})i\} + (1+6i)$

$= \frac{1}{2}(4-4i) + 1 + 6i = 3+4i$ //

(3) $\gamma - \alpha = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta - \alpha)$



$\gamma = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(2+i) + 1 + i$

$= \frac{1}{2}\{(2-\sqrt{3}) + (1+2\sqrt{3})i\} + 1 + i$

$= \frac{4-\sqrt{3}}{2} + \frac{3+2\sqrt{3}}{2}i$ //

または

$\gamma - \alpha = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta - \alpha)$

$\gamma = \frac{4+\sqrt{3}}{2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{2}i$ //

<point>

1. 原点以外の点を中心とする回転

$\boxed{8}$

1 ア. $(1+i)^6 = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^6$

$= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= -8i$ //

イ. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right)^6 = (\sqrt{3}+i)^{-6}$

$= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{-6}$

$= \frac{1}{64}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$

$= -\frac{1}{64}$ //

ウ. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}\right)^{12}$

$= \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right\}^{12}$

$= \frac{1}{64}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$

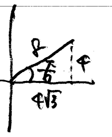
$= -\frac{1}{64}$ //

II. (1) $w^2=\{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i\}^2$

$=(\sqrt{3}+1)^2+2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)i-(\sqrt{3}-1)^2$

$=4\sqrt{3}+4i$ //

(2) $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと



$r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2=4\sqrt{3}+4i$

$r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)=8(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

∴ $r^2=8,\ 2\theta=\frac{\pi}{6}$

∴ $r=2\sqrt{2},\ \theta=\frac{\pi}{12}$

よって

$w=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ //

(3) $w^n=(2\sqrt{2})^n(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12})$

これが負の実数となるとき

$\sin\frac{n\pi}{12}=0$ …①, $\cos\frac{n\pi}{12}<0$ …②

①より

$n=12, 24, 36, 48, \cdots, 96$

うち②も満たすものは

$n=12, 36, 60, 84$ //

III. $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$

$\{2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})\}^m=\{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\}^n$

$2^m(\cos\frac{m\pi}{6}+i\sin\frac{m\pi}{6})=2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$

∴ $m=\frac{n}{2},\ \frac{m\pi}{6}=\frac{n\pi}{4}+2k\pi$ (k：整数)

$\frac{m}{6}=\frac{m}{2}+2k$

$m=-6k$

正の整数 m, n で最小のものは

$m=6, n=12$ //

〈point〉

1. ド・モアブルの定理

[9].

I. $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおく

$z^3=1$

$r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=1$

$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos0+i\sin0$

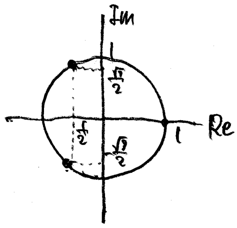
∴ $r^3=1,\ 3\theta=2k\pi$ $(k=0,1,2)$

∴ $r=1,\ \theta=\frac{2k}{3}\pi$ $(k=0,1,2)$

よって

$z=\cos0+i\sin0,\ \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$

$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ //



//

II. $z^4=8(1+\sqrt{3}i)$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$r^4(\cos\theta+i\sin\theta)^4=8(1+\sqrt{3}i)$

$r^4(\cos4\theta+i\sin4\theta)=16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

∴ $r^4=16$　$4\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k=0,1,2,3)$

∴ $r=2,\ \theta=\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi$ $(k=0,1,2,3)$

よって

$z=2(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}),\ 2(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi),$

$2(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi),\ 2(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi)$ //

III. (1) $z=\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}$ $(k=0,1,2,\cdots,11)$ //

(2) $z_k=\cos\frac{k\pi}{6}+i\sin\frac{k\pi}{6}$ $(k=0,1,2,\cdots,11)$ とすると

$z_0+z_1+\cdots+z_{11}=1+z+\cdots+z^{11}=\frac{z^{12}-1}{z-1}=0$ //

$z_0z_1\cdots z_{11}=z_0\cdot z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}\cdots z_5\overline{z_5}\cdot z_6$

$=z_0\cdot|z_1|^2|z_2|^2\cdots|z_5|^2\cdot z_6$

$=-1$ //

$\boxed{10}$

I (1) $z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$

$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ //

$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{z^5-1}{z-1}=0$ //

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$, $z\neq 0$ より

$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$

$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$

∴ $t^2+t=1$ //

(3) $z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{5}$

$t^2+t-1=0$ ∴ $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{5}>0$ より

$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ∴ $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ //

(4) 省略

II (1) $z^7=1$

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$ //

(2) $\bar{\alpha}=\overline{z+z^2+z^4}=\bar{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^3+z^5+z^6$

$\alpha+\bar{\alpha}=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$ //

$\alpha\bar{\alpha}=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

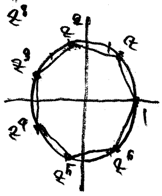
$=z^4+z^6+\underset{1}{z^7}+z^5+\underset{1}{z^7}+\underset{z}{z^8}+\underset{1}{z^7}+\underset{z^2}{z^9}+\underset{z^3}{z^{10}}=2$

$t^2-(\alpha+\bar{\alpha})t+\alpha\bar{\alpha}=0$ すなわち

$t^2+t+2=0$ の2解が α, $\bar{\alpha}$ で

α の虚部は正より

$\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ //



(3) $z^7=1$ より

z は $x^7=1$ の解の1つである

同様に $z^2,\cdots,z^6$ も $x^7=1$ の解であり、

これらはすべて異なり、これらはすべて1ではない。

$x^7-1=0$

$(x-1)(x^6+x^5+\cdots+1)=0$ より

$z,z^2,\cdots z^6$ は $x^6+x^5+\cdots+1=0$ の解であるから

$x^6+\cdots+1=(x-z)(x-z^2)\cdots(x-z^6)$

$x=1$ を代入して

与式 $=7$ //

III (1) $\alpha^7=1$

$\alpha+\cdots+\alpha^6=\frac{\alpha(\alpha^6-1)}{\alpha-1}=-1$ //

(2) $\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha^6}=\frac{(1-\alpha^6)+(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\alpha^6)}=\frac{2-\alpha-\alpha^6}{2-\alpha-\alpha^6}=1$

(3) 同様に

$\frac{1}{1-\alpha^2}+\frac{1}{1-\alpha^5}=1$

$\frac{1}{1-\alpha^3}+\frac{1}{1-\alpha^4}=1$

より

与式 $=3$ //

(4) $\frac{\alpha^2}{1-\alpha}=\frac{\alpha^2-1+1}{1-\alpha}=-(\alpha+1)+\frac{1}{1-\alpha}$

同様に考えて

与式 $=-(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^6)-6+3$

$=1-6+3=-2$ //