

1.4 剰余の問題(1)

(1) 整式の除法

一般に、正の整数 a, b に対して、

$$a = bq + r \text{ (ただし, } 0 \leq r < b \text{)}$$

を満たす整数 q, r がただ 1 組存在する。このときの q を a を b で割ったときの商、 r を余りという。そして、 $r=0$ のとき、 a は b で割り切れるという。同様にして整式 $A, B (B \neq 0)$ に対しても

$$A = BQ + R \text{ (ただし, } R \text{ は } 0 \text{ か } B \text{ より次数の低い整式)}$$

を満たす整式 Q, R がただ 1 組存在する。このときの整式 Q を A を B で割ったときの商といい、 R を余りという。そして、 $R=0$ のとき、 A は B で割り切れるという。これを割り算の原理という。

整式 A を整式 B で割るときには、次のことに注意する。

1. A, B を降べきの順に整理してから割り算を行う。その際、整式 A にある次数の項がないときには、その項の場所をあける。
2. 余りが 0 になるか、余りの次数が割る数 B の次数より低くなるまで計算を続ける。

例1

$(x^3 + 7 - 8x) \div (x - 2)$ を計算し、商と余りを求めよ。

解説

右の計算から、商は、 $x^2 + 2x - 4$

余りは、 -1

この結果から、

$$x^3 - 8x + 7 = (x - 2)(x^2 + 2x - 4) - 1$$

と表すことができます。

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 4 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 8x + 7} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 2x^2 - 8x \\ \underline{2x^2 - 4x} \\ -4x + 7 \\ \underline{-4x + 8} \\ -1 \end{array}$$

例2

整式 $3x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ を整式 $2x - 1$ で割った商と余りを求めよ。

【解説】

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{15}{8} \\
 2x-1 \overline{) 3x^3 - 2x^2 + 4x - 6} \\
 \underline{3x^3 - \frac{3}{2}x^2} \\
 -\frac{1}{2}x^2 + 4x \\
 \underline{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x} \\
 \frac{15}{4}x - 6 \\
 \underline{\frac{15}{4}x - \frac{15}{8}} \\
 -\frac{33}{8}
 \end{array}$$

よって、商は、 $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$ ，余りは、 $-\frac{33}{8}$

例3

整式 $2x^4 - x^3 + 3x + 1$ を整式 $x^2 + x - 1$ で割った商は $\boxed{}$ であり、
余りは $\boxed{}$ である。

【解説】

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 3x + 5 \\
 x^2 + x - 1 \overline{) 2x^4 - x^3 } \\
 \underline{2x^4 + 2x^3 - 2x^2} \\
 -3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-3x^3 - 3x^2 + 3x} \\
 5x^2 + 1 \\
 \underline{5x^2 + 5x - 5} \\
 -5x + 6
 \end{array}$$

よって、商は、 $2x^2 - 3x + 5$ ，余りは、 $-5x + 6$

次の例のように文字が2種類以上ある場合，ある文字に着目して，その文字について割り算をすることもある。

例4

整式 $P = x^2 + xy - 6y^2$ と $Q = x - y$ をともに x についての整式とみなして， P を Q で割り，その商と余りを求めよ。

(解説)

右の計算から

商 $x + 2y$ ，余り $-4y^2$

$$\begin{array}{r} x+2y \\ x-y \overline{) x^2 + xy - 6y^2} \\ \underline{x^2 - xy} \\ 2xy - 6y^2 \\ \underline{2xy - 2y^2} \\ -4y^2 \end{array}$$

(2) 組み立て除法

整式 $P(x)$ を1次式 $x - \alpha$ で割るとき，組み立て除法という簡便な方法がある。割り算を筆算で行うとき，書く量が多くなったり，引き算が出てきたりで面倒なところがあるが，組み立て除法を用いれば，書く量も減り，掛け算と足し算だけで割り算を行える。ただし，1次式で割るときにしか使えないので，万能ではない。

$P(x)$ が3次式の場合について考える。4次以上になっても同じように考えることができる。

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を $x - \alpha$ で割った商を $kx^2 + lx + m$ ，余りを r とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \alpha)(kx^2 + lx + m) + r \\ &= kx^3 + (l - \alpha k)x^2 + (m - \alpha l)x + r - \alpha m \end{aligned}$$

これが x についての恒等式より，係数を比較して

$$a = k, b = l - \alpha k, c = m - \alpha l, d = r - \alpha m$$

よって

$$k = a, l = b + \alpha k, m = c + \alpha l, r = d + \alpha m$$

となる。これを次のような図式で書く。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \alpha & | & a & & b & & c & & d \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & k & \nearrow & \alpha k & \nearrow & \alpha l & \nearrow & \alpha m \\
 & & & & l & \nearrow & m & \nearrow & r \\
 & & k=a & & l=b+\alpha k & & m=c+\alpha l & & r=d+\alpha m
 \end{array}$$

例1 の $(x^3+7-8x) \div (x-2)$ は,

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) \quad 1 \quad 0 \quad -8 \quad 7} \\
 \underline{ 2 \quad 4 \quad -8} \\
 1 \quad 2 \quad -4 \quad -1
 \end{array}$$

よって、商が x^2+2x-4 で余りが -1 となる

例2 の $(3x^3-2x^2+4x-6) \div (2x-1)$ は,

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2} \overline{) \quad 3 \quad -2 \quad 4 \quad -6} \\
 \underline{\phantom{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{15}{8}} \\
 3 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{15}{4} \quad -\frac{33}{8}
 \end{array}$$

まず、 $3x^3-2x^2+4x-6$ を $x-\frac{1}{2}$ で割って、

$$3x^3-2x^2+4x-6 = \left(x-\frac{1}{2}\right) \left(3x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}\right) - \frac{33}{8}$$

後ろのカッコから2をくくりだし、前のカッコにそれをかけて

$$= (2x-1) \left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}\right) - \frac{33}{8}$$

として、商は $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{15}{8}$, 余りは $-\frac{33}{8}$ となる。

この方法で割り算を行う場合、ある多項式を x の係数が1である $x-\alpha$ で割っていることに注意しなければならない。余りには影響はないが、商は、割る数を補正した分の逆数をかけなければならない。この問題では、割る数を2倍するので、商は、その逆数の $\frac{1}{2}$ をかけることになる。

(3) 剰余の定理

以下、 x についての整式を $P(x), Q(x)$ などと書き、 x に数 α を代入したときの $P(x)$ の値を $P(\alpha)$ と書く。

数式を1次式で割ったときの余りは定数である。この余りを割り算を行わないで求める方法を調べよう。

一般に、整式 $P(x)$ を1次式 $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$ ，余りを R とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R \quad (R \text{ は定数})$$

この等式の両辺の x に α を代入すると

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R \quad \therefore R = P(\alpha)$$

したがって、次の剰余の定理が成り立つ。

剰余の定理

整式 $P(x)$ を1次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ である

例5

整式 $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ を1次式 $x-2$ で割ったときの余りは
ア であり、1次式 $2x-1$ で割ったときの余りは ¹ である。

解説

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは

$$P(2) = 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1 = 11$$

$P(x)$ を $2x-1$ で割ったときの商を $Q(x)$ ，余りを r とすると

$$P(x) = (2x-1)Q(x) + r = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)Q(x) + r$$

よって、 $P\left(\frac{1}{2}\right) = r$ であり

$P(x)$ を $2x-1$ で割ったときの余りは

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{16}$$

例6

(1) x の整式 A を $x-1$ で割ったとき、商が x^2-2 、余りが 3 である。このとき、 A を求めよ。

(2) $3x^3-2x^2+1$ をある整式 A で割ると、商が $x+1$ 、余りが $x-3$ であるという。整式 A を求めよ。

(解説)

(1) $A=(x-1)(x^2-2)+3=x^3-x^2-2x+5$

(2) 題意より

$$3x^3-2x^2+1=A(x+1)+x-3$$

$$A(x+1)=3x^3-2x^2-x+4$$

右の計算より

$$A=3x^2-5x+4$$

$$\begin{array}{r} 3x^2-5x+4 \\ x+1 \overline{) 3x^3-2x^2-x+4} \\ \underline{3x^3+3x^2} \\ -5x^2-x \\ \underline{-5x^2-5x} \\ 4x+4 \\ \underline{4x+4} \\ 0 \end{array}$$

例7

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx-9$ は $x+3$ で割り切れ、 $x-2$ で割ると -5 余る。このとき、定数 a 、 b の値を求めよ。

(2) x^3 の係数が 1 の 3 次式 $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り、 $x-2$ で割ると 4 余るという。このとき、 $P(x)$ を求めよ。

(3) a 、 b 、 c は定数とする。整式 $f(x)=x^3+2x^2+ax+b$ を $x-1$ で割ったときの余りは 9 であり、 x^2+c で割ったときの余りは $x+2$ である。このとき、 a 、 b 、 c の値を求めよ。

(解説)

(1) 剰余の定理より

$$f(-3)=0, f(2)=-5$$

より

$$3a-b-12=0, 2a+b+2=0$$

$$\therefore a=2, b=-6$$

(2) 題意より

$$P(x)=(x-1)^2(x+a)+2x+3 \cdots \textcircled{1}$$

とおける

剰余の定理から、 $P(2)=4$ より

$$P(2)=a+9=4 \quad \therefore a=-5$$

よって、 $P(x)=(x-1)^2(x-5)+2x+3=x^3-7x^2+13x-2$

(3) $f(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 9 であるから
剰余の定理より, $f(1)=9$ より

$$1+2+a+b=9$$

$$\therefore b=6-a$$

また, $f(x)$ を x^2+c で割ったときの余りが $x+2$ であり,
 $f(x)$ の x^3 の係数が 1 であるから

$$f(x)=(x^2+c)(x+d)+x+2$$

とおけて

$$=x^3+dx^2+(c+1)x+cd+2$$

これが x についての恒等式であるから

$$d=2, c+1=a, b=cd+2$$

よって

$$a=2, b=4, c=1$$

(4) 因数定理

剰余の定理より, 次のことが成り立つ。

因数定理

1 次式 $x-\alpha$ が整式 $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P(\alpha)=0$

よって, $P(\alpha)=0$ のとき, $P(x)$ は $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ の形に表される。

例8

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$2x^3+11x^2-7x-6$$

(2) $2x^3-5x^2+5x+4$ を, 係数が整数の範囲で因数分解せよ。

解説

(1) $P(x)=2x^3+11x^2-7x-6$ とおくと,

$P(1)=2+11-7-6=0$ より, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ

よって,

$$P(x)=(x-1)(2x^2+13x+6)$$

$$=(x-1)(x+6)(2x+1)$$

(2) $P(x)=2x^3-5x^2+5x+4$ とおく

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(-\frac{1}{2}\right)+4=0 \text{ より}$$

$P(x)$ は $x+\frac{1}{2}$ を因数にもつ

よって、 $P(x)$ は $2\left(x+\frac{1}{2}\right)$, すなわち、 $2x+1$ を因数にもつから

$$P(x)=(2x+1)(x^2-3x+4)$$

x^2-3x+4 は、係数が整数の範囲で、これ以上因数分解できないから

$$P(x)=(2x+1)(x^2-3x+4)$$

補足

3 次式 ax^3+bx^2+cx+d が $px-q$ (p, q は有理数) を因数にもつとき、

$$ax^3+bx^2+cx+d=(px-q)(kx^2+lx+m) \quad (k, l, m \text{ は有理数})$$

とできる。

右辺を展開して、 x についての恒等式より、

$$a=pk, d=-qm$$

より、 p は a の約数、 q は d の約数である。

$p=1$ で因数が見つければ簡単であるが、そうでない場合は、 $px-q=0$

とするような x である $\frac{q}{p}$ も $P(x)=0$ とする x の候補として考える。

(5) 分数式

A, B を整式とすると、 $\frac{A}{B}$ の形で表され、かつ B に文字を含む式を分数式といい、 B を分母、 A を分子という。

例えば、 $\frac{2by}{5ax}, \frac{3}{5x-2}, \frac{5x^2-2x+3}{5x+2}$ は分数式であるが、 $\frac{2x-3}{5}$ は分母に文字を含まないので分数式ではない。

分数式では、分母と分子に 0 でない同じ整式を掛けても、分母と分子をその共通因数で割っても、もとの分数式に等しい。

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (\text{ただし、} C \neq 0)$$

分数式の分母と分子をその共通因数で割ることを約分するという。

例えば,

$$\frac{9a^2b^3c}{6a^3bc^2} = \frac{3b^2}{2ac}$$
$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-1} = \frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

のように, それ以上約分できない分数式を**既約分数式**という。

分数式の四則計算は, 分数と同様に行う。

分数式の乗法, 除法

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

分母が異なる分数式の加法, 減法は, まず各分数式の分母と分子に適当な整式をかけて, 分母が同じ分数式に直してから計算する。2つ以上の分数式の分母を同じ整式にすることを**通分**するという。

例9

(1) $\frac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10} \div \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ を計算せよ。

(2) $\frac{x-4}{x^2+x-2} - \frac{x-6}{x^2-4}$ を計算せよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10} \div \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} &= \frac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10} \times \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} \\ &= \frac{(x+7)(x+1)}{(x-2)(x-5)} \times \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x+7}{x-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{x-4}{x^2+x-2} - \frac{x-6}{x^2-4} &= \frac{x-4}{(x+2)(x-1)} - \frac{x-6}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(x-4)(x-2) - (x-6)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x+2}{(x+2)(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

繁分数や連分数の計算は次のように行う。

例10

(1) $\frac{x-1+\frac{2}{x+2}}{x+1-\frac{2}{x+2}}$ を簡単にせよ。

(2) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}}$ を簡単にせよ。

解説

$$(1) \frac{x-1+\frac{2}{x+2}}{x+1-\frac{2}{x+2}} = \frac{(x-1)(x+2)+2}{(x+1)(x+2)-2} = \frac{x^2+x}{x^2+3x} = \frac{x(x+1)}{x(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$(2) \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{-\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

別解

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1-\frac{1-x}{(1-x)-1}} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{x}{x+(1-x)} = x$$

(6) 部分分数分解

1つの分数式をそれより簡単ないくつかの分数式の和の形に直すことを、与えられた分数を部分分数に分解するという。

例11

(1) $\frac{4x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1}$ が恒等式であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

(2) すべての実数 x に対して $\frac{4}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$ が成り立つとき、 a, b, c の値を求めよ。

解説

(1) 両辺に $(x+2)(x-1)$ を掛けると

$$4x+5 = a(x-1) + b(x+2)$$

$$4x+5 = (a+b)x - a + 2b$$

も x についての恒等式より

$$a+b=4, \quad -a+2b=5$$

$$\therefore a=1, \quad b=3$$

(2) 両辺に $x(x+1)(x+2)$ を掛けると

$$4 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)$$

$$4 = (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a$$

も x についての恒等式より

$$0 = a+b+c, \quad 0 = 3a+2b+c, \quad 4 = 2a$$

$$\therefore a=2, \quad b=-4, \quad c=2$$

別解

両辺に $x(x+1)(x+2)$ を掛けて

$$a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) = 4 \cdots \textcircled{1} \quad x \neq 0, -1, -2$$

も x についての恒等式である

$x=0, -1, -2$ を代入して、 $a=2, b=-4, c=2$

このとき、 $\textcircled{1}$ は恒等式となる

よって、 $a=2, b=-4, c=2$

注 $x \neq 0, -1, -2$ であるのに、 $x=0, -1, -2$ を代入して a, b, c を求めていることを不当に思うかもしれないが、これは問題ない。

いま、 $x=0, -1, -2$ 以外の x では等号が成り立つから、これら以外の異なる3つの x で a, b, c を求めれば a, b, c は1通りに定まり、2次式の恒等式なので、 $x=0, -1, -2$ でも等号が成り立つ(2次式の恒等式で、 $x=0, -1, -2$ のときだけ成り立たないようなものは存在しない)。

$x=0, -1, -2$ でも等号が成り立つのであれば、初めから、求めやすい $x=0, -1, -2$ を代入して a, b, c を求めた方が楽である。

係数比較法でもできるが、2 次以上になったら数値代入法の方が楽にできる。

例12

(1) 恒等式 $\frac{3}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$ が成立しているとき、定数 A, B, C の値を求めよ。

(2) 次の に当てはまる数字を入れよ。

$$\frac{9}{x^2(x-3)} = \frac{\overset{\text{ア}}{\text{}}}{x} - \frac{\overset{\text{イ}}{\text{}}}{x^2} + \frac{\overset{\text{ウ}}{\text{}}}{x-3}$$

解説

(1) 両辺に $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$ をかけて

$$3 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$3 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C$$

も x についての恒等式より

$$A+B=0, \quad -A+B+C=0, \quad A+C=3$$

これを解いて

$$A=1, \quad B=-1, \quad C=2$$

㊦ 分数式は、(分子の次数)<(分母の次数)が基本である。 x^2-x+1 は 2 次であるから、分子の次数は 1 次以下となるので、定数ではなく $Bx+C$ とおく。

$$(2) \frac{9}{x^2(x-3)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-3} \text{ とおく}$$

両辺に $x^2(x-3)$ を掛けて

$$9 = ax(x-3) - b(x-3) + cx^2$$

$$9 = (a+c)x^2 - (3a+b)x + 3b$$

も x についての恒等式より

$$a+c=0, \quad 3a+b=0, \quad 3b=9$$

$$\therefore a = \overset{\text{ア}}{-1}, \quad b = \overset{\text{イ}}{3}, \quad c = \overset{\text{ウ}}{1}$$

注 $\frac{9}{x^2(x-3)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x-3} \dots \textcircled{1}$ とおくと,

両辺に $x^2(x-3)$ をかけて,

$$9 = a(x-3) + bx^2$$

$$9 = bx^2 + ax - 3a$$

も x についての恒等式より,

$$b=0, a=0, -3a=9$$

$a=0$ かつ $a=-3$ となり不合理である。

これは, $\textcircled{1}$ のようには表せないことを意味している。

x^2 は 2 次式であるから, その分子は 1 次以下 (0 次とは限らない) のので, 1 次式 $ax+b$ とおかなければならない。

$$\frac{9}{x^2(x-3)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x-3}$$

これをさらに整理して,

$$\frac{9}{x^2(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-3}$$

とおくとよい。

補1

- (1) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 1001 であり, その商を $x-11$ で割ると余りが 101 であった。 $P(x)$ を $x-11$ で割った余りを求めよ。
- (2) x についての整式 P を x^2+x+1 で割ると $x+1$ 余り, その商を $x-1$ で割ると 3 余る。 P を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ。

解説

- (1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)Q(x) + 1001 \cdots \textcircled{1}$$

- また, $Q(x)$ を $x-11$ で割ったときの商を $R(x)$ とすると

$$Q(x) = (x-11)R(x) + 101 \cdots \textcircled{2}$$

- ② を ① に代入すると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\{(x-11)R(x) + 101\} + 1001 \\ &= (x-1)(x-11)R(x) + 101(x-1) + 1001 \end{aligned}$$

- 剰余の定理により, $P(x)$ を $x-11$ で割った余りは $P(11)$ と等しいから, 求める余りは

$$P(11) = 101 \cdot (11-1) + 1001 = 2011$$

- (2) $P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$, $Q(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を $R(x)$ とおくと

$$P(x) = (x^2+x+1)Q(x) + x+1$$

$$Q(x) = (x-1)R(x) + 3$$

- よって

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+x+1)\{(x-1)R(x) + 3\} + x+1 \\ &= (x-1)(x^2+x+1)R(x) + 3(x^2+x+1) + x+1 \\ &= (x^3-1)R(x) + (3x^2+4x+4) \end{aligned}$$

- したがって, $P(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りは $3x^2+4x+4$

補2

$f(x)$ は x の 3 次式であり、 $f(1)=1$ 、 $f(2)=\frac{1}{2}$ 、 $f(3)=\frac{1}{3}$ 、 $f(4)=\frac{1}{4}$ を

満たしている。 $g(x)=xf(x)-1$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $g(x)$ の $x=0, 1, 2, 3, 4$ での値をそれぞれ求めよ。

(2) $g(x)$ を因数分解せよ。

(3) $g(5)$ を求め、それを利用して $f(5)$ を求めよ。

解説

$$(1) g(0) = 0 \cdot f(0) - 1 = -1,$$

$$g(1) = 1 \cdot f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$g(2) = 2f(2) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$g(3) = 3f(3) - 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$$g(4) = 4f(4) - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 0$$

(2) $g(x)$ は 4 次式であり、(1) から因数定理より

$$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

とおける

$$g(0) = -1 \text{ より}$$

$$24a = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{24}$$

よって

$$g(x) = -\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$(3) (2) \text{より, } g(5) = -\frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = -1$$

$$g(5) = 5f(5) - 1 \text{ より}$$

$$-1 = 5f(5) - 1 \quad \therefore f(5) = 0$$

補3

次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$(2) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= -\frac{1}{(a-b)(c-a)} - \frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{(b-c) + (c-a) + (a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ (与式)} &= -\frac{a^3}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^3}{(a-b)(b-c)} - \frac{c^3}{(c-a)(b-c)} \\ &= -\frac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{(分子)} &= (b-c)a^3 - (b^3 - c^3)a + bc(b^2 - c^2) \\ &= (b-c)a^3 - (b-c)(b^2 + bc + c^2)a + bc(b-c)(b+c) \\ &= (b-c)\{a^3 - (b^2 + bc + c^2)a + bc(b+c)\} \\ &= (b-c)\{(c-a)b^2 + (c^2 - ca)b + (a^3 - c^2a)\} \\ &= (b-c)\{(c-a)b^2 + c(c-a)b + a(a^2 - c^2)\} \\ &= (b-c)(c-a)\{b^2 + bc - a(a+c)\} \\ &= (b-c)(c-a)\{-(a-b)c - (a^2 - b^2)\} \\ &= (b-c)(c-a)(a-b)\{-c - (a+b)\} \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \end{aligned}$$

よって

$$\text{(与式)} = a + b + c$$