

高3数学 発展問題演習 13. 微分法

① [2017 愛知教育大]

$f(x)$ を微分可能な関数で、 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) 定義にしたがって $f(x)$ の導関数を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

② [Ⅰ, Ⅱ. 一橋大 Ⅲ. 2020 広島工業大]

Ⅰ. 2つの放物線 $y = x^2$ と $y = ax^2 + bx + c$ は2点 $(-1, 1), (2, 4)$ で交わっていて、点 $(2, 4)$ における接線のなす角は $\frac{\pi}{4}$ である。 a, b, c を求めよ。

Ⅱ. 曲線 $y = x^3$ 上の点 $P(a, a^3)$ における接線を l , l がふたたびこの曲線と交わる点を Q , Q におけるこの曲線の接線を m とし, 2直線 l, m がなす角のうち鋭角であるほうを θ とする。 $a > 0$ として,

- (1) $\tan \theta$ を a で表せ。
- (2) θ が最大となるときの a の値と $\tan \theta$ の値を求めよ。

Ⅲ. 放物線 $y = x^2$ 上の点 P における接線を ℓ , 点 P を通り y 軸に平行な直線を m , 直線 ℓ に関して直線 m と対称な直線を n とする。点 P の x 座標を t とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を t を用いて表せ。
- (2) $t \neq 0$ のとき, 直線 ℓ に関して点 $A(t, 0)$ と対称な点を B とする。点 B の座標を t を用いて表せ。
- (3) $t \neq 0$ のとき, 直線 n の方程式を t を用いて表せ。
- (4) 点 P が放物線上を動くとき, すべての直線 n が共通して通る点 F が存在することを示し, 点 F の座標を求めよ。
- (5) 点 P が放物線上を動くとき, 直線 ℓ に関して点 F と対称な点の軌跡を求めよ。

高3数学 発展問題演習 13. 微分法

3 [I . 1997 関西学院大 II . 2010 早稲田大]

I . xy 平面上の 3 次曲線 $K : y = \frac{3}{2}x\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$ について

- (1) 原点で曲線 K と接線を共有している円 C の方程式を求めよ. ただし, 円 C の中心の x 座標を p ($p \neq 0$) とする.
- (2) 更に, 曲線 K と円 C とが, 原点以外の K 上の点でも接線を共有するとき, 円 C の方程式を求めよ.

II . t を実数とする。2 つの放物線

$$y = x^2 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y = -(x - t)^2 + t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の両方に接する 2 本の直線を ℓ_1, ℓ_2 とし, ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P , ℓ_1 と $\textcircled{1}$ の接点を $A(\alpha, \alpha^2 + 1)$, ℓ_2 と $\textcircled{1}$ の接点を $B(\beta, \beta^2 + 1)$ とする。

- (1) P の座標を α, β を用いて表せ。
- (2) 三角形 APB の面積を $S(t)$ とするとき, $S(t)$ を t の式で表せ。
- (3) $S(t)$ の最小値を求めよ。

4 [(1) 1996 小樽商科大 (2) 2012 東京理科大]

(1) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6ax^2$ が極大値をもつ条件を求めよ。

(2) a, b を実数として, x の 4 次関数 $f(x) = x^4 - ax^2 + bx$ が極大値をもつための必要十分条件を a と b に関する不等式で表せ。

5 [I . 2007 横浜国立大 II . 1998 東京大]

I . a, b は実数とする。関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ が極大値と極小値をもつ。

- (1) 極大値が正で, 極小値が負で, かつ極大値と極小値の和が負となる点 (a, b) の範囲を図示せよ。
- (2) 極大値が 1 で, 極小値が -1 であるような点 (a, b) をすべて求めよ。

II . a は 0 でない実数とする。関数 $f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

高3数学 発展問題演習 13. 微分法

6 [I . 2016 一橋大 II . 2014 京都大]

I . a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3ax$ とする. 区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする. M の最小値とそのときの a の値を求めよ.

II . $\triangle ABC$ は, 条件 $\angle B = 2\angle A$, $BC = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする. このとき, $\cos \angle B$ を求めよ.

7 [一橋大 横浜国立大 千葉大 京都女子大 香川大 学習院大 岡山大]

I . $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$ とする.

(1) 方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ. また, $1 < \alpha < 2$ であることを示せ.

(2) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする. α と β の大小を比較せよ.

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ.

II . 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + k$ について, 次の問いに答えよ. ただし, k は定数とする.

(1) $f(x)$ が極値をとるときの x の値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき, k の値およびその整数解を求めよ.

III . m を実数とする. x に関する方程式 $x^3 - 3x - |x - m| = 0$ の実数解の個数を求めよ.

IV . $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$ とする. 方程式 $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$ は, 必ず正の解をもち, かつ正の解はただ 1 つであることを示せ.

V . 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3a^2x + a^2 - a$ について, 次の問いに答えよ.

(1) この関数の極値を調べよ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数の解をもつような a の値の範囲を求めよ.

(3) (2) のとき, 3 つの解は $-2a$ と $2a$ の間にあることを示せ.

VI . a, b を実数とする. 3 次方程式 $x^3 - 3ax^2 + a + b = 0$ が 3 個の相異なる実数解をもち, そのうち 1 個だけが負となるための a, b の満たす条件を求めよ. また, その条件を満たす点 (a, b) の存在する領域を ab 平面上に図示せよ.

高3数学 発展問題演習 13. 微分法

VII. $f(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とする. ただし, a, b は実数の定数であり, $a \geq 0$ とする.

(1) 3 次方程式 $f(x) = 0$ のすべての解が区間 $-1 \leq x \leq 1$ に含まれる実数解であるための条件を, a と b に関する不等式で表せ.

(2) 座標平面上で, (1)で求めた条件を満たす点 (a, b) の集合が表す領域を D とする. D の概形を描き, その面積を求めよ.

8 [I. 2009 神戸大 II. 2004 東京大]

I. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える.

このとき, 以下のことを示せ.

(1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ.

(2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる.

(3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば,

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる.

II. 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x), \quad h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

(1) a を実数とする. $f(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(2) $g(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

(3) $h(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ.

9 [I. 一橋大 II. 1999 京都大 III. 同志社大]

I. 点 $P(a, b)$ から曲線 $y = x^3 - x$ に対し, 傾きが 2 以下の接線が 3 本引ける. このような点 P の存在範囲を S とする.

(1) S を図示せよ.

(2) S の面積を求めよ.

II. 3 次関数 $y = x^3 + kx$ のグラフを考える. 連立不等式 $y > -x$, $y < -1$ が表す領域を A とする. A のどの点からも上の 3 次関数のグラフに接線が 3 本引けるための, k についての必要十分条件を求めよ.

III. 関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ は, $f(4) = 0$ を満たし, $x = 3$ で極小値 -27 をとる.

このとき, $a = \square$, $b = \square$, $c = \square$ である. p を実数とするとき, 点 $(3, p)$ から

曲線 $y = f(x)$ に引くことができる接線の本数 n について考える. $n = 1$ であるような p

の値は $\square$ であり, $n = 3$ であるような p の値は $\square$ である.

10 [2006 一橋大]

- (1) k を定数とする。 $x \geq 0$ ならば常に $4x^3 + 1 \geq kx$ となるような k の値の範囲を求めよ。
- (2) $x \geq 0, y \geq 0$ のとき, $\frac{4(x^3 + y^3) + 5}{x + y + 1}$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。