

3.2 関数の増減・最大・最小

(1) 関数の増加と減少

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で、开区間 (a, b) で微分可能であるとします。このとき、次のことが成り立つ。

導関数の符号と関数の増減

1. 开区間 (a, b) で常に $f'(x) > 0$ ならば、 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で単調に増加する。
2. 开区間 (a, b) で常に $f'(x) < 0$ ならば、 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で単調に減少する。
3. 开区間 (a, b) で常に $f'(x) = 0$ ならば、 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定数である。

1の証明

閉区間 $[a, b]$ において、 $a \leq p < q \leq b$ を満たす任意の2つの値 p, q をとると、平均値の定理より

$$f(q) - f(p) = (q - p)f'(c), \quad p < c < q$$

となる実数 c が存在する。

ここで、 $q - p > 0, f'(c) > 0$ より

$$f(q) - f(p) > 0 \quad \therefore f(p) < f(q)$$

よって、 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で単調に増加する

2, 3 も同様に示すことができる。

また、3 を用いると次のことが導かれる。

関数 $f(x), g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、开区間 (a, b) で微分可能で常に $g'(x) = f'(x)$ ならば、次のことが成り立つ。

閉区間 $[a, b]$ で $g(x) = f(x) + C$ (C は定数)

$F(x) = f(x) - g(x)$ とおくと、

$F(x)$ は $[a, b]$ で連続で、 (a, b) で微分可能である

$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ であるから、3 より

$$F(x) = C \quad \therefore g(x) = f(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

(2) 関数の極大と極小

$f(x)$ は連続な関数とします。 $x=a$ を含む十分小さい开区間において、
「 $x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ 」が成り立つとき、 $f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい、 $f(a)$ を極大値といい、

「 $x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ 」が成り立つとき、 $f(x)$ は $x=a$ で極小であるといい、 $f(a)$ を極小値という。

極大値と極小値をまとめて極値という。

関数 $f(x)$ が $x=a$ を境目として増加から減少に移るとき、 $f(a)$ は極大値であり、減少から増加に移るとき、 $f(a)$ は極小値である。

関数 $f(x)$ が極値をとるための必要条件として次のことが成り立ちます。

極値をとるための必要条件

関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとする

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば、 $f'(a)=0$

この命題の逆は一般には成り立ちたない。すなわち、

$f'(a)=0$ であっても、 $f(a)$ が極値であるとは限らない。

例えば、 $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ であるが、 $f(0)$ は極値ではない。

また、 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるという条件がないと、この命題は偽である。

例えば、 $f(x)=|x|$ は $x=0$ で極小値をとるが、 $f'(0)=0$ ではない。

$f(x)$ が微分可能で $f'(a)=0$ であるとき、 $x=a$ を境目として $f'(x)$ の符号が変わるときは、次のように極値を判定することができる。

$x=a$ を内部に含むある区間において

$x < a$ で $f'(x) > 0$, $a < x$ で $f'(x) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値

$x < a$ で $f'(x) < 0$, $a < x$ で $f'(x) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値

☞ この命題も $f(x)$ が微分可能であるという条件が重要である。

($f(x)$ が微分可能であれば $f(x)$ は連続などということが重要)

例1

関数 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ の極値を求めよ.

(解説)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\frac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは, $x=-2, 1$

$x=-2$ で極小 極小値 $f(-2) = -\frac{1}{2}$

$x=1$ で極大 極大値 $f(1)=1$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		極小		極大	

例2

関数 $y = \frac{4|x-2|}{x^2-4x+8}$ の増減を調べ, 極値があれば, それを求めよ. また, そのグラフをかけ.

(解説)

$$f(x) = \frac{4(x-2)}{x^2-4x+8} \text{ とおく}$$

$$y = \frac{4|x-2|}{x^2-4x+8} = \begin{cases} f(x) & (x \geq 2) \\ -f(x) & (x < 2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2-4x+8) - 4(x-2)(2x-4)}{(x^2-4x+8)^2} = \frac{-4x(x-4)}{(x^2-4x+8)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0, 4$

$x=0$ で極小 極小値 $f(0) = -1$

$x=4$ で極大 極大値 $f(4) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-2)}{x^2-4x+8} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4(x-2)}{x^2-4x+8} = 0$$

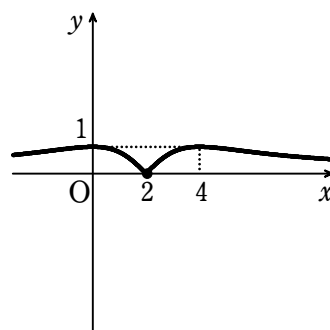
$$y = \frac{4|x-2|}{x^2-4x+8} \text{ のグラフは右図}$$

極値は

$x=0, 4$ のとき極大値 1

$x=2$ のとき極小値 0

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		極小		極大	



例3

関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 2}$ (a, b, c は定数) が $x = -2$ で極小値 $\frac{1}{2}$, $x = 1$ で極大値 2 をもつ。このとき a, b, c の値を求めよ。

(解説)

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 + 2) - 2x(ax^2 + bx + c)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-bx^2 + (4a - 2c)x + 2b}{(x^2 + 2)^2}$$

$f'(-2) = 0$, $f'(1) = 0$ であることが必要

$$f'(-2) = \frac{-4b - 8a + 4c + 2b}{36} = \frac{-8a - 2b + 4c}{36} = 0$$

$$f'(1) = \frac{-b + 4a - 2c + 2b}{9} = \frac{4a + b - 2c}{9} = 0$$

$$\therefore 4a + b - 2c = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 2 \text{ より}$$

$$f(-2) = \frac{4a - 2b + c}{6} = \frac{1}{2} \quad \therefore 4a - 2b + c = 3 \dots \textcircled{2}$$

$$f(1) = \frac{a + b + c}{3} = 2 \quad \therefore a + b + c = 6 \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より, $a = 1, b = 2, c = 3$

このとき

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}, \quad f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2 + 2)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになり, 条件を満たす

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$

よって, $a = 1, b = 2, c = 3$

[注] $f'(-2) = 0, f'(1) = 0$ は必要条件なので, 逆も調べます。

例4

関数 $f(x) = \frac{e^{kx}}{x^2 + 1}$ ($k > 0$) が極値をもつとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

$$f'(x) = \frac{ke^{kx}(x^2+1) - e^{kx} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{kx}(kx^2 - 2x + k)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは, $e^{kx} > 0$, $x^2+1 > 0$ より

$$kx^2 - 2x + k = 0$$

$f(x)$ が極値をもつとき,

$f'(x)=0$ が実数解をもち, その前後で $f'(x)$ の符号が変わればよいから
この方程式の判別式を D として, $D > 0$ より

$$\frac{D}{4} = 1 - k^2 > 0 \quad \therefore k^2 < 1$$

$k > 0$ より, $0 < k < 1$

(3) 第2次導関数と極値

第2次導関数を利用して, 極値を判定することを考える。

第2次導関数と極値

$x=a$ を含むある区間で $f''(x)$ は連続であるとする

1. $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば, $f(a)$ は極大値である
2. $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば, $f(a)$ は極小値である

1 の証明

$f''(x)$ は連続であるので,

$f''(a)<0$ であるから, $x=a$ の十分近くでは $f''(x)<0$ より

$f'(x)$ は単調に減少する

$f'(a)=0$ であるから,

$x < a$ では $f'(x) > 0$, $x > a$ では $f'(x) < 0$ より

$f(a)$ は極大値である

2 も同様にして証明できる。

例5

$f(x) = x \sin x$ とする。このとき, $f'(x)$ は $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において減少し,

$f(x)$ は $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ において極大値をとることを示せ。

解説

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ において } f''(x) < 0 \text{ より}$$

$$f'(x) \text{ は } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ において減少する}$$

$$f'(x) \text{ は } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ で連続であり,}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0, \quad f'(\pi) = -\pi < 0 \text{ であるから, 中間値の定理より}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ が } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ の範囲にただ 1 つ存在する}$$

$$\text{その値を } c \text{ とすると, } \frac{\pi}{2} < c < \pi, \quad f''(c) < 0$$

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) < 0 \text{ より } f(x) \text{ は } x = c \text{ で極大}$$

$$\text{よって, } f(x) \text{ は } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ において極大値をとる}$$

例6

$x > 0$ の範囲で関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$ を考える。

(1) $f(x)$ が極大値をとる x の値を小さい方から順に $x_1, x_2, \dots$ とおく。一般の $n \geq 1$ に対し x_n を求めよ。

(2) 数列 $\{f(x_n)\}$ が等比数列であることを示し, $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ。

(解説)

$$(1) f(x) = e^{-x} \sin x \text{ から}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = -\sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k=0, 1, \dots)$$

$f(x)$ が極大値をとるとき,

x の前後で $f'(x)$ の符号が正から負に変わるから

$k=2(n-1) \quad (n=1, 2, \dots)$ のとき極大値をとる

$$\text{よって, } x_n = \frac{\pi}{4} + 2(n-1)\pi \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2) f(x_n) = e^{-\{\frac{\pi}{4} + 2(n-1)\pi\}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2(n-1)\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} (e^{-2\pi})^{n-1}$$

数列 $\{f(x_n)\}$ は、初項 $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}$ 、公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列

よって、 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ は初項 $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}$ 、公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数で、

$|e^{-2\pi}| < 1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}}}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)}$$

(4) 最大値・最小値

関数の最大値、最小値について考える。極大、極小は、極大、極小をとる x を含む十分小さい開区間内での最大、最小であるのに対し、関数の最大、最小は定義域内のすべての x における値の最大、最小である。

例7

(1) 関数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{3 + \cos x}$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは、 $x = -1, 1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$x = -1$ で極小 極小値 $f(-1) = -\frac{1}{2}$

$x = 1$ で極大 極大値 $f(1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + x} = 0$$

よって、最大値 $\frac{1}{2} (x=1)$ ，最小値 $-\frac{1}{2} (x=-1)$

(2) 定義域は

$$1-x^2 \geq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$\sqrt{1-x^2} = -x$$

$$1-x^2 = x^2, x \leq 0$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

よって、最大値 $1 (x=1)$ ，最小値 $-\sqrt{2} \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(3) $f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから、 $0 \leq x < 2\pi$ で考える

$$f'(x) = \frac{\cos x (3 + \cos x) + \sin^2 x}{(3 + \cos x)^2} = \frac{1 + 3\cos x}{(3 + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } \cos x = -\frac{1}{3}$$

この解を $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと、

$$\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \pi < \beta < \frac{3}{2}\pi \text{ より } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

$x = \alpha$ で極大

$$\text{極大値 } f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{3 + \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$x = \beta$ で極小

$$\text{極小値 } f(\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$f(0) = 0, f(2\pi) = 0$$

よって、最大値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

例8

原点を O とする xy 平面上の曲線 $y=e^{-x}$ に対して、点 $P(t, e^{-t}) (t>0)$ における接線を ℓ とする。 ℓ と x 軸との交点を A 、 ℓ と y 軸との交点を B とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) 2 点 A 、 B の座標をそれぞれ求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の面積を $S(t)$ とするとき、 $S(t)$ を求めよ。
- (4) $S(t)$ の最大値を求めよ。

解説

(1) $f(x)=e^{-x}$ とおくと

$$f'(x)=-e^{-x}$$

接線 ℓ の方程式は

$$y-e^{-t}=f'(t)(x-t)$$

$$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$$

$$\therefore y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$$

(2) A は

$$-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}=0$$

$$-e^{-t}\{x-(t+1)\}=0$$

$e^{-t} \neq 0$ より、 $x=t+1$

よって、 $A(t+1, 0)$

B は、 $B(0, (t+1)e^{-t})$

$$(3) S(t) = \frac{1}{2} OA \cdot OB$$

$$= \frac{1}{2} (t+1) \cdot (t+1)e^{-t} = \frac{1}{2} (t+1)^2 e^{-t}$$

$$(4) S'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2(t+1) \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} (t+1)^2 \cdot e^{-t} \cdot (-1)$$

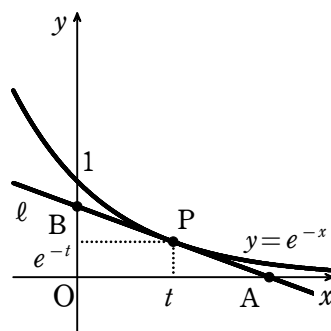
$$= \frac{1}{2} (t+1) e^{-t} \{2 - (t+1)\}$$

$$= \frac{1}{2} (1+t)(1-t) e^{-t}$$

$S'(t)=0$ となるのは、 $t=1$

$S(t)$ は $t=1$ で最大

$$\text{最大値 } f(1) = \frac{2}{e}$$



t	0	...	1	...
$S'(t)$	$\nearrow$	+	0	-
$S(t)$	$\nearrow$	$\nearrow$	最大	$\searrow$

例9

AB=AC=1 の二等辺三角形 ABC において、BC=2x、内接円の半径を r とする。次の問いに答えよ。

(1) r を x で表せ。

(2) r を最大にする x の値を求めよ。

解説

(1) 三角形の成立条件より

$$1-1 < 2x < 1+1 \quad \therefore 0 < x < 1$$

$$AM = \sqrt{1-x^2}$$

$\triangle ABC$ の内心を I とすると

$\triangle ABC = \triangle ABI + \triangle BCI + \triangle CAI$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot r$$

$$x\sqrt{1-x^2} = (x+1)r$$

$$\therefore r = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}} \quad (0 < x < 1)$$

$$(2) r^2 = \frac{x^2(1-x)}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{x+1} \text{ とおくと, } f(x) = \frac{-x^3+x^2}{x+1}$$

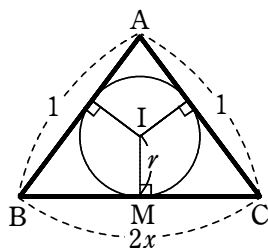
$$f'(x) = \frac{(-3x^2+2x)(x+1)-(-x^3+x^2)}{(x+1)^2} = -\frac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

x	0	...	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ のとき極大かつ最大}$$

$$r > 0 \text{ であるから, } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ のとき } r \text{ も最大となる}$$



補1

関数 $f(x) = \frac{a - \cos x}{a + \sin x}$ が、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で極大値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。また、その極大値が2となるときの a の値を求めよ。

(解説)

$$f(x) = \frac{a - \cos x}{a + \sin x}$$

$$f'(x) = \frac{a \sin x - a \cos x + 1}{(a + \sin x)^2} = \frac{\sqrt{2} a \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1}{(a + \sin x)^2}$$

$a \neq 0$ は明らかであるから

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ が極値をもつためには、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}a} \dots \textcircled{1} \text{ が解をもてばよい}$$

$$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \text{ であるから, } -\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{2}a} < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より}$$
$$a < -1, 1 < a$$

このとき、 $\textcircled{1}$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ でただ1つの実数解をもつ

その解を α とすると、 $f'(\alpha) = 0$

$a < -1$ のとき、 $f'(x)$ は $x = \alpha$ で正から負に変わるから、
 $x = \alpha$ で極大となる

$a > 1$ のとき、 $f'(x)$ は $x = \alpha$ で負から正に変わるから、
 $x = \alpha$ で極小となり、不適

よって、 $a < -1$

極大値が2となるとき、

$$\frac{a - \cos \alpha}{a + \sin \alpha} = 2 \text{ かつ } a \sin \alpha - a \cos \alpha + 1 = 0$$

より

$$a^2 = \frac{1}{2}, 5$$

$a < -1$ より、 $a = -\sqrt{5}$

補2

関数 $f(x) = x^x (x > 0)$ について

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ の最小値およびそのときの x の値を求めよ.
- (3) 原点を通り，曲線 $y = f(x)$ に接する直線の方程式を求めよ.

(解説)

(1) $f(x) = x^x (x > 0)$

$$\log f(x) = x \log x$$

両辺 x で微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1$$

$$\therefore f'(x) = f(x)(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$$

(2) $f'(x) = 0$ となるのは， $x = \frac{1}{e}$

$0 < x < \frac{1}{e}$ のとき $f'(x) < 0$ ， $x > \frac{1}{e}$ のとき $f'(x) > 0$ より

$f(x)$ は $x = \frac{1}{e}$ で極小かつ最小

最小値 $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$

(3) $x = t$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y = t^t(\log t + 1)(x - t) + t^t$$

これが原点を通るとき

$$t(\log t + 1) - 1 = 0$$

$t(\log t + 1) - 1 = g(t)$ とおくと

$$g'(t) = \log t + 2$$

$g'(t) = 0$ となるのは， $t = e^{-2}$

$g(t)$ の増減を調べて， $g(p)$ は $p = e^{-2}$ で極小かつ最小

$\lim_{p \rightarrow +0} g(p) = -1$ ， $g(1) = 0$ より，

$g(t) = 0$ を満たす t の値は $t = 1$ のみ

このとき，接線の方程式は $y = x$

補3

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

解説

$$f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \text{ とする}$$

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{\sqrt{3}}{4}(-x)^2 = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = f(x) \text{ より}$$

$f(x)$ は偶関数であるから, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で考える

$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$f''(x) = -\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$f''(x) = 0$ となるのは

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		-	0	+	
$f'(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi = \frac{\sqrt{3}\pi - 4}{4} > \frac{1.7 \times 3.1 - 4}{4} = \frac{1.27}{4} > 0$$

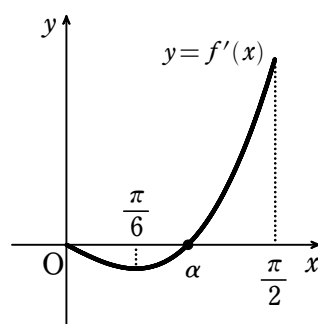
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $y = f'(x)$ のグラフは右図

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で $f'(x) = 0$ を満たす x がただ1つ

存在し, その値を α とおくと

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	



$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2 > \frac{1.7}{16} \times 3.1^2 = \frac{16.337}{16} > 1$$

よって, $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で最大 最大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$

したがって、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、

$$\text{最大値 } \frac{\sqrt{3}}{16} \pi^2 \left(x = \pm \frac{\pi}{2} \right)$$

補4

a, b は定数で、 $a > 0$ とする．関数 $f(x) = \frac{x-b}{x^2+a}$ の最大値が $\frac{1}{6}$ ，最小値が $-\frac{1}{2}$ であるとき、 a, b のそれぞれの値を求めよ．

解説

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2bx + a}{(x^2 + a)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$x^2 - 2bx - a = 0$$

この判別式を D とおくと、

$$\frac{D}{4} = b^2 + a > 0 \quad (a > 0)$$

よって、 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつ

x	...	α	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ であるから、

$x = \alpha$ で最小、 $x = \beta$ で最大値をとるから

$$f(\alpha) = \frac{\alpha - b}{\alpha^2 + a} = -\frac{1}{2}, \quad f(\beta) = \frac{\beta - b}{\beta^2 + a} = \frac{1}{6}$$

解と係数の関係から、 $\alpha + \beta = 2b$ 、 $\alpha\beta = -a$ より

$$\frac{\alpha - \beta}{2\alpha(\alpha - \beta)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\beta - \alpha}{2\beta(\beta - \alpha)} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \alpha = -1, \quad \beta = 3, \quad a = 3, \quad b = 1$$

補5

関数 $f(x) = \frac{-3x+7}{x^2-2x+2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値と、極値を与える x の値を求めよ。

(2) a を正の定数とすると、 $-1 \leq x \leq a$ によって表される範囲における $f(x)$ の最大値、最小値、および、それらを与える x の値を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \frac{1}{(x^2-2x+2)^2} \{-3(x^2-2x+2) + (3x-7)(2x-2)\} \\ &= \frac{(x-4)(3x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x=4, \frac{2}{3}$$

x	...	$\frac{2}{3}$	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき極大 極大値 } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

$$x = 4 \text{ のとき極小 極小値 } f(4) = -\frac{1}{2}$$

(2) $f(x) = f(-1)$ となるとき

$$\frac{-3x+7}{x^2-2x+2} = 2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$(x+1)(2x-3) = 0 \quad \therefore x = -1, \frac{3}{2}$$

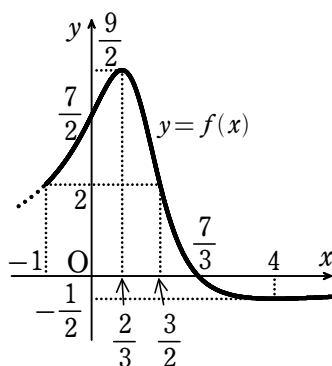
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

最大値は

$$0 < a < \frac{2}{3} \text{ のとき, } f(a) = \frac{-3a+7}{a^2-2a+2}$$

$$a \geq \frac{2}{3} \text{ のとき, } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

最小値は



$$0 < a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき, } f(-1) = 2$$

$$\frac{3}{2} < a < 4 \text{ のとき, } f(a) = \frac{-3a+7}{a^2-2a+2}$$

$$a \geq 4 \text{ のとき, } f(4) = -\frac{1}{2}$$

補6

関数 $f(x) = \frac{x}{x^2+ax+b}$ が定める曲線 $y=f(x)$ は原点で直線 $y=x$ に接している.

(1) b の値を求めよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め, そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

(4) $f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき, a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ.

解説

$$(1) f(x) = \frac{x}{x^2+ax+b}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+ax+b-x(2x+a)}{(x^2+ax+b)^2} = \frac{b-x^2}{(x^2+ax+b)^2}$$

$y=f(x)$ は原点で $y=x$ に接しているから, $f'(0)=1$

$$b \neq 0 \text{ のとき, } f'(x) = \frac{-x^2}{(x^2+ax)^2} \text{ であるから,}$$

$f'(0)$ は定義されないので不適

$$b \neq 0 \text{ のとき, } \frac{b}{b^2} = 1 \quad \therefore b=1$$

よって, $b=1$

$$(2) f(x) = \frac{x}{x^2+ax+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+a+\frac{1}{x}} = 0$$

(3) $x^2 + ax + 1 = 0$ が実数解 $x = \alpha$ をもつとすると, $\alpha \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) = \infty$ または $\lim_{x \rightarrow \alpha+0} f(x) = -\infty$ となり,

最大値または最小値をもたない.

よって, 最大値と最小値をもつ必要条件は,

$x^2 + ax + 1 = 0$ が実数解をもたない, すなわち,

$x^2 + ax + 1 = 0$ の判別式を D として, $D < 0$ となればよい

$$D = a^2 - 4 < 0 \quad \therefore -2 < a < 2$$

$$\text{このとき, } f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+ax+1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2+ax+1)^2}$$

ゆえに, $y = f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$$f(-1) = \frac{1}{a-2} < 0, \quad f(1) = \frac{1}{a+2} > 0$$

(2) と合わせて, $-2 < a < 2$ のとき最大値と最小値をもち,

$$\text{最大値 } f(1) = \frac{1}{a+2}, \quad \text{最小値 } f(-1) = \frac{1}{a-2}$$

(4) (3) より, 最小値をもたないのは, $a = 2$ のとき

$$\text{このとき, 最大値は } \frac{1}{a+2} = \frac{1}{4}$$