

高3理系数学 標準問題演習 演習 1.極限(1)

①[(1) 2007 福岡大 (2) 2001 上智大 (3) 2015 東京電機大 (4) 2011 産業医科大]

(1) 2つの数列 $p_n = \frac{2^n a - 2^{-n}}{2^{n+1} - 2^{-n-1}}$, $q_n = \frac{9n^2 + 5}{(2an+1)(4n-3)}$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ となる

正の定数 a の値を求めると, $a = \boxed{}$ である。またこのとき,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_a(2x) - \log_a(3x+2)\}$ の値は $\boxed{}$ である。

(2) $a_1 = 5$, $a_2 = 12$, $a_3 = 21$, …… なる数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の階差数列 $\{b_n\}$ が等差

数列のとき, $b_n = \boxed{}n + \boxed{}$ であり, $a_n = \boxed{}n^2 + \boxed{}n + \boxed{}$

である。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n} - n) = \boxed{}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} - \sqrt{n} \right) = \boxed{}$ である。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}$ を求めよ。

(4) 数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n \cdot \sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2 \right\}$ の値を求めよ。

②[I. 福島大 II. 1999 名城大 III. 2010 東京理科大]

I. a, b を正の実数とするととき, 極限 $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$ を考える。

(1) $a=2, b=2$ のとき, c の値を求めよ。

(2) $a>2, b=2$ のとき, c の値を求めよ。

(3) $b=3$ のとき, $c = \frac{1}{3}$ となる a の範囲を求めよ。

II. n が自然数で, $x \geq 0$ であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} - 2x + 3}{x^n + 1}$ を求めよ。

(2) 上の極限値を $f(x)$ とするとき, $y=f(x)$ のグラフをかけ。

III. 関数 $f(x)$ ($x>0$) を

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(7x+6)^n + (9x)^n}$$

により定める。「正の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 」ということなどから,

$0 < x \leq \boxed{}$ のときは $f(x) = \boxed{}x + \boxed{}$ であり, $x > \boxed{}$ のときは

$f(x) = \boxed{}x + \boxed{}$ であることがわかる。

高3理系数学 標準問題演習 演習 1.極限(1)

3 [(1) 2008 関西大 (2) 2014 関西大]

(1) n を 2 以上の自然数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt[n]{\quad}$ であり、

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)^2 \log \left\{1 + \frac{3}{4n(n-1)}\right\} = \sqrt[n]{\quad}$ である。

(2) a, b を正の数とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}\right)^n = \quad$ である。

4 [広島大]

a, b は、 $0 < a < b$ をみたす定数とし、 n を自然数とする。

(1) 不等式 $n \log_2 b < \log_2 (a^n + b^n) < n \log_2 b + 1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ を求めよ。

5 [I. 1998 神戸大 II. 2013 京都工芸繊維大]

I. n を自然数とする。次の各問いに答えよ。

(1) 自然数 k は $2 \leq k \leq n$ を満たすとする。 9^k を 10 進法で表したときの桁数は、 9^{k-1} の桁数と等しいか、または 1 だけ大きいことを示せ。

(2) 9^{k-1} と 9^k の桁数が等しいような $2 \leq k \leq n$ の範囲の自然数 k の個数を a_n とする。 9^n の桁数を n と a_n を用いて表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ。

II. m を自然数とし、 N を m 以上の自然数とする。

(1) m の倍数のうち N 以下の最大のものを km (k は自然数) と表すとき、不等式

$\frac{N}{m} - 1 < k \leq \frac{N}{m}$ が成り立つことを示せ。

(2) m の倍数のうち 1 以上 N 以下のものすべての和を $S(N)$ で表す。極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N^2}$ を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 演習 1.極限(1)

6 [I . 2003 会津大 II . 2018 東北大]

I . 座標平面上の点であって、 x 座標、 y 座標とも整数であるものを格子点と呼ぶ。0 以上の整数 n に対して、不等式 $|x| + |y| \leq n$ を満たす格子点 (x, y) の個数を a_n とおく。更に、 $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$ とおく。

(1) a_n を求めよ。

(2) b_n を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^3}$ を求めよ。

II . xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。 m を正の整数とすると、放物線 $y = x^2 - 2mx + m^2$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする。

(1) D の周上の格子点の数 L_m を m で表せ。

(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表せ。

(3) D の面積を S_m とする。 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m}$ を求めよ。

7 [1999 近畿大]

1 から始まる連続した自然数の列を次のように群に分ける。第 n 群に含まれる自然数の個数は n^2 である。

$\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \dots$
 第 1 群 第 2 群 第 3 群

(1) 第 21 群の最初の数はいくつである。第 12 群の 100 番目の数はいくつである。

(2) 1999 は第いくつ群のいくつ番目の数である。

(3) 第 n 群の最初の数 a_n とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = \text{いくつ}$$

である。また、第 n 群に含まれるすべての数の和を S_n とすると、ある自然数 k に

いて数列 $\left\{ \frac{S_n}{n^k} \right\} (n=1, 2, 3, \dots)$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束する。このような k

のうち最小のものは $k = \text{いくつ}$ であり、この k の値に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^k} = \text{いくつ}$$

となる。

高3理系数学 標準問題演習 演習 1.極限(1)

8 [I . 2006 早稲田大 II . 1999 防衛医科大学校 III . 2007 東北大]

I . $n=1, 2, \dots$ に対して x の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $P_n(x)=0$ の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。

(2) t が $P_n(x)=0$ の解であるとき, $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

(3) $P_n(x)=0$ の正の実数解を α_n とするとき, $P_n(x)=0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。
さらに $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

II . $f(x) = x^2 + 4n \cos x + 1 - 4n$, $n=1, 2, 3, \dots$ として, 以下の問いに答えよ。

(1) 各 n に対して

$$f(x) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 x がただ 1 つずつあることを示せ。

(2) (1) の条件を満たす x を x_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示せ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2$ を求めよ。

III . 自然数 n に対し, 方程式 $\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$ を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

(1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2) (1) の解を x_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ。