1.3　複素数と図形

(1) 線分の内分点・外分点

　複素数 $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ の表す点を，それぞれ A, B とする。

　このとき，AB を $m : n$ に内分する点 γ を C とし，原点を O とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$$

となる。外分の場合も同様にして求めることができる。

　よって，2 点 A(α), B(β) に対して，次のことが成り立つ。

内分点・外分点

1. 線分 AB を $m : n$ に内分する点を表す複素数は $\dfrac{n\alpha + m\beta}{m+n}$

特に，線分 AB の中点を表す複素数は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

2. 線分 AB を $m : n$ に外分する点を表す複素数は $\dfrac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$

　同様にして，3 点 α, β, γ を頂点とする三角形の重心 δ は

$$\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

と求めることができる。

例1

複素数平面上に 2 点 A$(-3+2i)$，B$(1-i)$ がある。

(1)　点 A と点 B との距離を求めよ。

(2)　点 A と点 B を結ぶ線分を 3：2 の比に内分する点 C を求めよ。

(3)　原点を O とするとき，△ OAB の重心を表す点 G を求めよ。

解説

(1) $\mathrm{AB} = |(1-i) - (-3+2i)|$

$= |4-3i|$

$= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

(2) $\dfrac{2(-3+2i)+3(1-i)}{3+2}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$

(3) $\dfrac{0+(-3+2i)+(1-i)}{3}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}i$

例2

複素数平面において，円周 $|z|=1$ 上の異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 を考える。
このとき，次の条件 p と q は同値であることを示せ。

p : z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形が正三角形である

q : $z_1+z_2+z_3=0$

解説

$p \Longrightarrow q$ の証明

複号同順として

点 z_2，z_3 は点 z_1 を原点中心に

それぞれ $\pm\dfrac{2}{3}\pi$，$\mp\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転したものより

$$
\begin{aligned}
&z_1+z_2+z_3\\
&=z_1+\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\}z_1+\left\{\cos\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\\
&=z_1+\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1+\left(-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1=0
\end{aligned}
$$

$q \Longrightarrow p$ の証明

$z_1+z_2+z_3=0$ であるから，$z_1+z_2=-z_3$ より

$$
\begin{aligned}
&|z_1+z_2|=|-z_3|\\
&|z_1+z_2|^2=|z_3|^2\\
&(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=1\\
&z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1\\
&1+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+1=1 \qquad \therefore\ z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\
&=|z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2\\
&=1-(-1)+1=3
\end{aligned}
$$

$\therefore |z_1-z_2|=\sqrt{3}$

同様にして，$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，$|z_3-z_1|=\sqrt{3}$ より

$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

よって，3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形は正三角形である

したがって，条件 p と q は同値である

(2) 半直線のなす角

O(0), A(α), B(β) を異なる 3 点とするとき，半直線 OA から半直線 OB までの回転角を $\angle\alpha 0\beta$ と表すことにすると (向きも考えて)

$$\angle\alpha 0\beta=\arg\beta-\arg\alpha=\arg\frac{\beta}{\alpha}$$

例3

複素数平面上で，A(α)，B(β) は $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$，$|\alpha-\beta|=3$ を満たす O(0) と異なる複素数を表す点とする．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ．

(2) α の絶対値を求めよ．

(3) $\triangle$OAB の面積を求めよ．

解説

(1) $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$，$\beta\neq 0$ より

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{\alpha}{\beta}+1=0 \qquad \therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(2) (1)より

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\beta$$

$$\alpha=\{\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\}\beta \quad (\text{複号同順})$$

よって，点 A は点 B を原点周りに 60° または -60° だけ回転した点である

$|\alpha|=|\beta|$ であるから， OA$=$OB より，$\triangle$OAB は正三角形

$|\beta-\alpha|=3$ であるから，AB$=3$ より， $|\alpha|=$OA$=3$

(3) $\triangle$OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

例4

複素数平面上で点 z と点 z' とが，原点と点 $\alpha\,(\alpha \neq 0)$ を通る直線に関して対称な点であるためには $\overline{\alpha}z' = \alpha\overline{z}$ が必要十分条件であることを証明せよ．ただし，対称軸上の点はそれ自身と対称である．

解説

$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(z')$ とし，α の偏角を θ とすると

$$\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

次の手順で P を移動すると，P は Q に移る

① 原点の周りに $-\theta$ だけ回転移動

② 実軸に関して対称移動

③ 原点の周りに θ だけ回転移動

①で P が $\mathrm{P}_1(z_1)$ に，② で $\mathrm{P}_1(z_1)$ が $\mathrm{P}_2(z_2)$ に移ったとすると

$$z_1 = \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}z$$

$$= \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|}z$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{\alpha}{|\alpha|}\overline{z}$$

$$z' = \frac{\alpha}{|\alpha|}z_2 = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2}\overline{z} = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\overline{z} \qquad \therefore\ \overline{\alpha}z' = \alpha\overline{z}$$

逆に $\overline{\alpha}z' = \alpha\overline{z}$ であるとき

$$|\overline{\alpha}z'| = |\alpha\overline{z}|$$

$$|\overline{\alpha}||z'| = |\alpha||\overline{z}|$$

$|\overline{\alpha}| = |\alpha|, |\overline{z}| = |z|$ より，$|z'| = |z|$

また，$\dfrac{z'}{\alpha} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{\alpha}} = \overline{\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)}$ より

$$\arg\frac{z'}{\alpha} = \arg\overline{\left(\frac{z}{\alpha}\right)} = -\arg\frac{z}{\alpha}$$

半直線 OP と線分 PQ の交点をHとすると

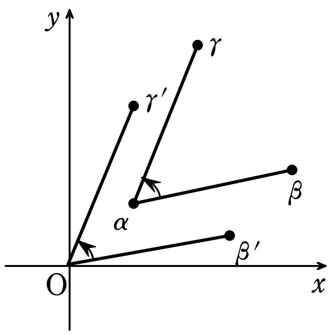
△OPQ は OP＝OQ の二等辺三角形であり

∠POH＝∠QOH であるから，

$\mathrm{PH} = \mathrm{QH},\ \angle\mathrm{PHO} = \angle\mathrm{QHO} = \dfrac{\pi}{2}$ より

点 z と点 z' は原点と点 α を通る直線に関して対称

よって，題意は示された



A(α), B(β), C(γ) を異なる 3 点とするとき，半直線 AB から半直線 AC までの回転角を，$\angle\beta\alpha\gamma$ と表すことにする。

点 α が点 0 に移るような平行移動で，点 β が点 β' に，点 γ が点 γ' に移るとすると

$$\beta'=\beta-\alpha,\ \gamma'=\gamma-\alpha$$

また，

$$\angle\beta\alpha\gamma=\angle\beta'0\gamma'$$

$$=\arg\gamma'-\arg\beta' =\arg\frac{\gamma'}{\beta'}$$

したがって，次の等式が成り立つ。

半直線のなす角

異なる 3 点 α, β, γ に対して， $\angle\beta\alpha\gamma=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

例5

複素数平面上の 3 点 $-1+i$，$-i$，$2+5i$ をそれぞれ，P，Q，R とする．

三角形 PQR の辺 PQ の長さは $^{ア}\boxed{}$，辺 QR の長さは $^{イ}\boxed{}$，

$\angle$PQR の大きさは $^{ウ}\boxed{}^\circ$ である．また，三角形 PQR の面積は

$^{エ}\boxed{}$ である．

解説

$$\mathrm{PQ}=|(-1+i)-(-i)|=|-1+2i|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\mathrm{QR}=|(2+5i)-(-i)|=|2+6i|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$$

$$\frac{2+5i-(-i)}{-1+i-(-i)}=\frac{2+6i}{-1+2i}=\frac{(2+6i)(-1-2i)}{5}=2-2i$$

$$=2\sqrt{2}\{\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)\}$$

よって，$\angle$PQR の大きさは 45°

三角形 PQR の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5$$

例6

(1) 複素数 z_1，z_2，z_3 を表す複素数平面上の点を，それぞれ A，B，C とする。3 点 A，B，C が AB：BC：CA＝1：$\sqrt{3}$：2 の三角形をつくるとき

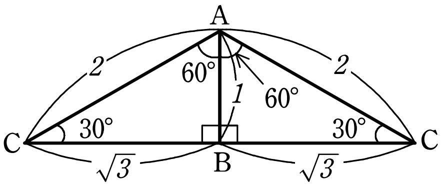
$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}={}^{ア}\boxed{}\pm\sqrt{{}^{イ}\boxed{}}\,i$$

である。

(2) 複素平面上に 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) がある．$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$|\alpha-\gamma|=4$ とするとき，△ABC の面積を求めよ.

(解説)

AB：BC：CA＝1：$\sqrt{3}$：2 より



∠A＝60°，∠B＝90°，∠C＝30°

よって，点 C は点 A を中心に

点 B を 60° 回転または −60° 回転し，

点 A からの距離を 2 倍にした点より

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=2\{\cos(\pm60^\circ)+i\sin(\pm60^\circ)\}$$

$$={}^{ア}1\pm\sqrt{{}^{イ}3}\,i$$

(2) $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos30^\circ+i\sin30^\circ$

点 A は，点 B を点 C の周りに 30° 回転した点である

また， CA＝CB

$|\alpha-\gamma|=4$ より， CA＝CB＝4

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin30^\circ=4$$

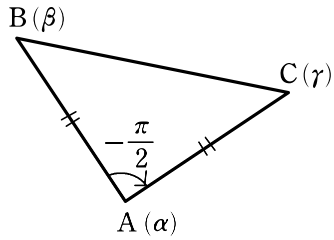
例7
異なる3つの複素数 α，β，γ が $\gamma+i\beta=\alpha(1+i)$ を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点を A，B，C とするとき，△ABC はどのような形か答えよ。

解説

$\gamma+i\beta=\alpha(1+i)$ より

$$\gamma-\alpha=-i(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$



よって，点 C(γ) は，点 B(β) を点 A(α) を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である

したがって，△ABC は $\angle A=\frac{\pi}{2}$，

AB＝AC の直角二等辺三角形

例8
複素数平面上で，複素数 α, β, γ を表す点をそれぞれ A, B, C とする．
(1)　A, B, C が正三角形の3頂点であるとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ …… (*) が成立することを示せ．
(2)　逆に，この関係式 (*) が成立するとき，A＝B＝C となるか，または A, B, C が正三角形の3頂点となることを示せ．

解説

(1) △ABC が正三角形であるとき，

AB＝AC かつ ∠BAC＝60° より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ) \text{ (複号同順)}$$

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^3=-1$$

$$(\gamma-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3=0$$

$$\{(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)\}\{(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2\}=0$$

$$(\beta+\gamma-2\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=0$$

$\beta+\gamma-2\alpha=0$ とすると，$\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}$ となり，A, B, C が正三角形の頂点であることに反するから，$\beta+\gamma-2\alpha\fallingdotseq 0$ より

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$

$\boxed{\text{別解}}$

$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}$ かつ $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBA}=60^\circ$ より

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right| \text{ かつ } \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha)$$

$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

(2) $(*)$ が成り立つとき

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$$

$$(\gamma-\alpha)^2+\{(\gamma-\alpha)-(\beta-\alpha)\}^2+(\beta-\alpha)^2=0$$

$$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

(i) $\alpha=\beta$ のとき

$$(\gamma-\alpha)^2=0 \quad \therefore\ \gamma=\alpha$$

よって，$\alpha=\beta=\gamma$

したがって，A=B=C となる

(ii) $\alpha\neq\beta$ のとき

両辺 $(\beta-\alpha)^2$ で割って

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)+1=0$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos(\pm60^\circ)+i\sin(\pm60^\circ) \text{ (複号同順)}$$

AB=AC かつ $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ より

△ABC が正三角形である

(i)，(ii)より，題意は示された

$\boxed{\text{別解}}$

$(*)$ が成り立つとき

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta-\alpha) \cdots ①$$

(i) $\alpha=\beta$ のとき

$$(\gamma-\alpha)^2=0 \quad \therefore\ \gamma=\alpha$$

よって，$\alpha=\beta=\gamma$

したがって，A=B=C となる

(ii) $\alpha \neq \beta$ のとき

①より，$\beta \neq \gamma$ であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}$$

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right| \text{ かつ } \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}\right)$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}$ かつ $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CBA}$ より

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCA}$

したがって，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}$ であるから

$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である

(i)，(ii)より，題意は示された

例9

異なる複素数 α，β，γ が $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ を満たすとき

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求めよ．

(2)　複素数平面上で，3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような三角形か．

(3)　α，β，γ が x の 3 次方程式 $x^3+kx+20=0$ (k は実数の定数) の解であるとき，α，β，γ および k の値を求めよ．

解説

(1) $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma=0$ より

$(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2=0$

$\beta \neq \alpha$ より

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=-1 \qquad \therefore \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i$$

(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm i=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって，C は B を A の周りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転したものであるから

$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角二等辺三角形

(3) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=0 \cdots$①，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=k \cdots$②，$\alpha\beta\gamma=-20 \cdots$③

$x^3+kx+20=0$ は実数を係数とする 3 次方程式であるから，

α は実数，β と γ は共役な複素数である
①から， △ABCの重心は原点より
$\alpha=-2t$ ，β, γ は $t\pm 3ti=t(1\pm 3i)$ (t は実数) とおける
③より

$$-2(1+3i)(1-3i)t^3=-20$$

$$t^3=1 \qquad \therefore\ t=1$$

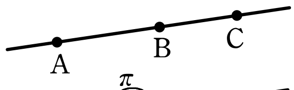
よって， $\alpha=-2, \beta=1\pm 3i, \gamma=1\mp 3i$ (複号同順)
②より

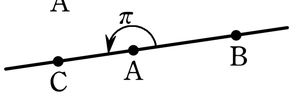
$$k=-2\cdot 2+(-1+3i)(-1-3i)=6$$

(3) **共線条件・垂直条件**

回転角 $\angle\beta\alpha\gamma$ が，特別な値をとる場合を考える。

$\angle\beta\alpha\gamma$ が 0 または π であるとき，
3 点 A(α), B(β), C(γ) は一直線上にある。

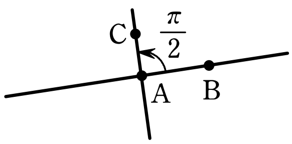




このとき， $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が 0 または π

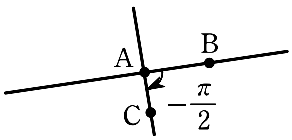
すなわち， $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。

$\angle\beta\alpha\gamma$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，
2 直線 AB, AC は垂直に交わる。



このとき， $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$

すなわち， $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数である。



よって，異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) について，次のことが成り立つ。

共線条件・垂直条件

3 点 A, B, C が一直線上にある $\Longleftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数

2 直線 AB, AC が垂直に交わる $\Longleftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数

例9

(1) 異なる 3 つの複素数 $\alpha=xi$，$\beta=4+3i$，$\gamma=2+2i$ （$i^2=-1$ で，x は実数）が複素数平面上で表す点を，それぞれ A，B，C とする。3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，x の値を求めよ。

(2) 虚部が正で $|z|=\sqrt{3}$ となる複素数 z に対して，複素数平面上の 3 点 A (z)，B (z^2)，C (z^3) を考える。∠BAC が直角となるとき，z を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{xi-(2+2i)}{(4+3i)-(2+2i)}=\dfrac{-2+(x-2)i}{2+i}=\dfrac{\{-2+(x-2)i\}(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{x-6+(2x-2)i}{5}$ …①

3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，

①が実数となればよいから

$\dfrac{2x-2}{5}=0 \quad \therefore x=1$

(2) $z=x+yi$ （x，y は実数で，$y>0$）とおくと

$\dfrac{z^3-z}{z^2-z}=\dfrac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)}=z+1=x+1+yi$ …①

∠BAC が直角となるとき，

①が純虚数となればよいから

$x+1=0$, $y\neq 0$

$x+1=0$ より， $x=-1$

$|z|^2=3$ であるから，$x^2+y^2=3$ より

$(-1)^2+y^2=3$

$y^2=2$

$y>0$ より， $y=\sqrt{2}$

よって， $z=-1+\sqrt{2}\,i$

別解

$\dfrac{z^3-z}{z^2-z}=z+1$ …①

∠BAC が直角となるとき，

①は純虚数であるから

$\overline{(z+1)}=-(z+1)$

$\overline{z}+1=-z-1$

$\therefore\ z+\overline{z}=-2$

$|z|=\sqrt{3}$ であるから，$|z|^2=3$ より，$z\overline{z}=3$

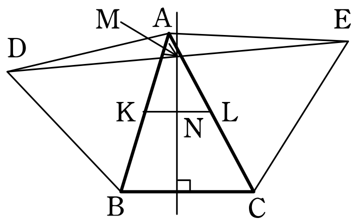
z，$\overline{z}$ は 2 次方程式 $t^2+2t+3=0$ の 2 解より

$t=-1\pm\sqrt{2}\,i$

z の虚部は正より，$z=-1+\sqrt{2}\,i$

例10 複素数平面上に三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB，ACE とがある．ただし，点 C，点 D は直線 AB に関して反対側にあり，また，点 B，点 E は直線 AC に関して反対側にある．線分 AB の中点を K，線分 AC の中点を L，線分 DE の中点を M とする．線分 KL の中点を N とするとき，直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ．

解説



A を原点とし，B(β)，C(γ) とする

D(d)，E(e)，K(k)，L(l)，M(m)，N(n) とおく

MN⊥BC であるとき，

$\dfrac{n-m}{\gamma-\beta}$ が純虚数であればよい

3 点 A，B，C が反時計回りの順にあるとすると

$$k=\frac{1}{2}\beta,\ l=\frac{1}{2}\gamma,\ n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma\right)=\frac{1}{4}(\beta+\gamma)$$

$$d=\beta\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}=\frac{1}{2}\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta i$$

$$e=\gamma(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\frac{1}{2}\gamma+\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma i$$

点 M は線分 DE の中点より

$$m=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta i\right)+\left(\frac{1}{2}\gamma+\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma i\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(\beta+\gamma)-\frac{\sqrt{3}}{4}(\beta-\gamma)i$$

よって

$$\frac{n-m}{\gamma-\beta}=\frac{\frac{1}{4}(\beta+\gamma)-\left\{\frac{1}{4}(\beta+\gamma)-\frac{\sqrt{3}}{4}(\beta-\gamma)i\right\}}{\gamma-\beta}=-\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

したがって，　$MN \perp BC$
3 点 A，B，C が時計回りの順にあるときも同様

例11
(1)　α，β，γ，δ を互いに異なる複素数とし，複素数平面上でこれらに対応する点をそれぞれ A，B，C，D とする．このとき，AB と CD が垂直となるための必要十分条件は，$\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数となることである．これを示せ．
(2)　O を複素数平面上の原点とする．3 点 O，A，B が三角形をなすとき，$\triangle$OAB の頂点 A，B よりその対辺 OB および OA に下ろしてできる 2 つの垂線の交点を P とする．このとき，OP と AB が垂直であることを，(1) を使って示せ．ただし，$\triangle$OABは直角三角形ではないとする．

解説
(1) 点 B が原点に移るように点 A を平行移動した点 E は $\alpha-\beta$，
点 D が原点に移るように点 C を平行移動した点 F は $\gamma-\delta$
AB と CD が垂直
$\Leftrightarrow \angle EOF=90^\circ$
$\Leftrightarrow \arg\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\pm 90^\circ$
$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\right|\{\cos(\pm 90^\circ)+i\sin(\pm 90^\circ)\}=\pm\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}\right|i$
$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ が純虚数　(直交条件)
(2) O (0)，A (α)，B (β) とし，P (γ) とする
$OP \perp AB$ のとき，
$\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$ が純虚数であればよい
$OA \perp BP$ であるから，$\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}$ は純虚数より

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right)}=-\frac{\alpha}{\beta-\gamma}$$

$$\therefore\ \alpha\overline{\beta}+\alpha\overline{\gamma}+\overline{\alpha}\beta+\overline{\alpha}\gamma=0 \cdots ①$$

$OB \perp AP$ であるから，$\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$ は純虚数より

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\gamma-\alpha}\right)}=-\frac{\beta}{\gamma-\alpha}$$

$\therefore\ \overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\gamma}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\beta}\gamma=0$ …②

①−②より

$$(\alpha-\beta)\overline{\gamma}+(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\gamma=0$$

$$\therefore\ \overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)}=-\frac{\gamma}{\alpha-\beta}$$

よって，$\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$ は純虚数

したがって，OP⊥AB

(4) 相似条件

6 点 $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ をそれぞれ A, B, C, P, Q, R とする。

△ABC と △PQR が相似であるとき

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PQ}} \text{ かつ } \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{QPR}$$

であるから，$r>0,\ -\pi<\theta<\pi$ として

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=r(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ かつ}$$

$$\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}=r\{\cos(\pm\theta)+i\sin(\pm\theta)\}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta) \text{ または } \overline{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

したがって，次のことが成り立ちます。

相似条件

△ABC と△PQR が相似であるとき

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1} \text{ または } \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\overline{\left(\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right)}$$

例12

z を実数でない複素数，$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ を複素数平面上の 3 点とする。

(1)　3 点 A，B，C は一直線上にないことを示せ。

(2)　w を $w \fallingdotseq 0$，1 である複素数，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(1)$，$\mathrm{Q}(w)$ を複素数平面上の 3 点とし，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{OPQ}$，$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{POQ}$ とする。w の値を z を用いて表せ。ただし，角は向きを含めて考える。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形になるときの z の値を求めよ。

解説

(1) $z \fallingdotseq 0$，1 より

$$\frac{z^3-z}{z^2-z}=\frac{z^2-1}{z-1}=\frac{(z+1)(z-1)}{z-1}=z+1$$

$z+1$ は実数でないから，3 点 A，B，C は一直線上にない

(2) 条件より，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{OPQ}$ (向きも含めて) であるから

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{w-0}{1-0}=\frac{z^3-z}{z^2-z}$$

$$\therefore\ w=z+1$$

(3) (2) より，$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角二等辺三角形になることと

$\triangle\mathrm{OPQ}$ が直角二等辺三角形になることは同値であるから

(i) $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{CAB}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形，すなわち

$\triangle\mathrm{OPQ}$ が $\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形になるとき

$$w=\pm i \quad \therefore\ z=-1\pm i$$

(ii) $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形，すなわち

$\triangle\mathrm{OPQ}$ が $\angle\mathrm{OPQ}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形になるとき

$$w=1\pm i \quad \therefore\ z=\pm i$$

(iii) $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形，すなわち

$\triangle\mathrm{OPQ}$ が $\angle\mathrm{PQO}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角二等辺三角形になるとき

$$w=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i \quad \therefore z=\frac{-1\pm i}{2}$$

(ⅰ)〜(ⅲ)より， $z=-1\pm i$， $\pm i$， $\dfrac{-1\pm i}{2}$

(5) 共円条件

4 点 A, B, C, D が同一円周上にあることを示すには，円周角の定理，内接四角形の対角の和は180°，接弦定理等を利用して示せばよい。

例13

複素数平面上で $z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0°<\theta<90°)$, $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$, $z_2=-\dfrac{1}{z_0}$ を表す点を，それぞれ P_0, P_1, P_2 とする.

(1)　z_1 を極形式で表せ.

(2)　z_2 を極形式で表せ.

(3)　原点 O, P_0, P_1, P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ.

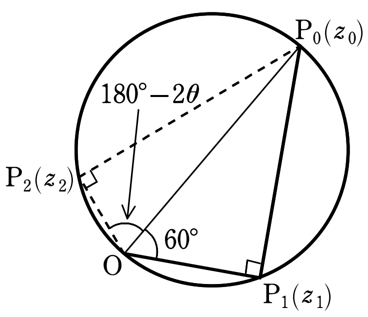
(解説)

(1) $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\{\cos(-60°)+i\sin(-60°)\}(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(\theta-60°)+i\sin(\theta-60°)$$

(2) $z_2=-\dfrac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=\frac{1}{2}(-\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\{\cos(180°-\theta)+i\sin(180°-\theta)\}$$



(3) $OP_0=2$, $OP_1=1$, $\angle P_1OP_0=60°$ より

$\angle P_0P_1O=90°$

よって， 4 点 O, P_0, P_1, P_2 が同一円周上にあるとき

$\angle OP_2P_0=90°$，すなわち $\dfrac{z_0-z_2}{0-z_2}$ が純虚数

$$\frac{z_0 - z_2}{0 - z_2} = \frac{z_0 + \frac{1}{z_0}}{\frac{1}{z_0}} = z_0{}^2 + 1$$

$$\begin{aligned} z_0{}^2 + 1 &= \{2(\cos\theta + i\sin\theta)\}^2 + 1 \\ &= 4(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 1 \\ &= (4\cos 2\theta + 1) + i\cdot 4\sin 2\theta \end{aligned}$$

よって，

$$4\cos 2\theta + 1 = 0$$

$$4(2\cos^2\theta - 1) + 1 = 0$$

$$\cos^2\theta = \frac{3}{8}$$

$0° < \theta < 90°$ より

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4},\ \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

したがって

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$$

補1

4つの複素数 z_1，z_2，z_3，z_4 は互いに異なり，その絶対値はすべて1であるとする。

(1)　z_1，z_2，z_3 を頂点とする複素数平面上の三角形が正三角形のとき，$z_1+z_2+z_3=0$ となることを示せ。

(2)　$z_1+z_2+z_3=0$ が成り立つとき，z_1，z_2，z_3 を頂点とする複素数平面上の三角形は正三角形であることを示せ。

(3)　$z_1+z_2+z_3+z_4=0$ が成り立つとき，z_1，z_2，z_3，z_4 を頂点とする複素数平面上の四角形は長方形であることを示せ。

(解説)

複素数平面上で，z_1，z_2，z_3，z_4 が表す点をそれぞれA，B，C，Dとする

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ であるから，A，B，C，Dは単位円上を反時計回りでこの順に並んでいるとしても一般性を失わない

(1) A，B，Cを頂点とする三角形が正三角形であるから

$$z_2=z_1\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_1$$

$$z_3=z_1\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z_1$$

よって

$$z_1+z_2+z_3=z_1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}z_1=0$$

(2) $z_1+z_2+z_3=0$ であるから，$z_1+z_2=-z_3$ より

$$|z_1+z_2|=|-z_3|$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_3|^2$$

$$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=1$$

$$z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1$$

$$1+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+1=1 \qquad \therefore z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1$$

このとき

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2\\&=1-(-1)+1=3\end{aligned}$$

$\therefore |z_1-z_2|=\sqrt{3}$

同様にして，$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，$|z_3-z_1|=\sqrt{3}$ より

$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

よって，三角形 ABC は正三角形である

(3) $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ であるから，$z_1+z_2=-z_3-z_4$ より

$|z_1+z_2|=|-z_3-z_4|$

$|z_1+z_2|^2=|z_3+z_4|^2$

$2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2+z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4$

$\therefore z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4$

$|z_1-z_2|^2=2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$, $|z_3-z_4|^2=2-(z_3\overline{z_4}+\overline{z_3}z_4)$ より

$|z_1-z_2|^2=|z_3-z_4|^2$

$\therefore |z_1-z_2|=|z_3-z_4|$

同様にして，$|z_1-z_4|=|z_2-z_3|$ より

四角形 ABCD は平行四辺形である

また，同様にして $|z_1-z_3|=|z_2-z_4|$ より

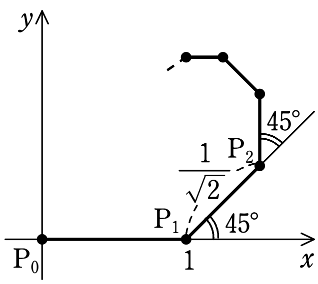
四角形 ABCD の対角線の長さが等しいから

四角形 ABCD は長方形である

補2

右図のように複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達した後，45° 回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．

このとき，点 P_{10} が表す複素数を求めよ．



解説

点 P_n が表す複素数を z_n, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45° + i\sin 45°) = \alpha$ とすると

$$z_{n+2} - z_{n+1} = (z_{n+1} - z_n)\alpha \ (n = 0, 1, 2, \cdots),\ z_0 = 0,\ z_1 = 1$$

$$\therefore z_{n+1} - z_n = \alpha^n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

よって

$$z_{10} = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots + (z_{10} - z_9)$$

$$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^9 = \frac{1 - \alpha^{10}}{1 - \alpha}$$

ここで，$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \dfrac{1+i}{2}$,

$\alpha^{10} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\{\cos(45° \times 10) + i\sin(45° \times 10)\} = \dfrac{i}{32}$ より

$$z_{10} = \frac{1 - \dfrac{i}{32}}{1 - \dfrac{1+i}{2}} = \frac{32 - i}{32} \cdot \frac{2}{1 - i} = \frac{32 - i}{32}(1 + i) = \frac{33 + 31i}{32}$$

補3
複素数の数列 z_0，z_1，z_2，……，z_n，…… で初項 z_0 は 1 とし，z_{n+1} と z_n の関係 ($n=0$，1，2，……) は次の規則で定める．
複素数平面上で z_n を原点の周りに 60° 回転移動し，更に実軸の正の方向に 2 だけ平行移動したものを z_{n+1} とする．
(1)　z_{n+1} と z_n の関係を漸化式で表せ．
(2)　(1) で求めた漸化式はある複素数 α，β により $z_{n+1}-\alpha=\beta(z_n-\alpha)$ という形に変形できる．α，β の値を求めよ．
(3)　数列 $\{z_n\}$ の一般項を求めよ．
(4)　数列 $\{z_n\}$ の各項は複素数平面上のある円周の上にのる．その円の中心と半径を求めよ．

解説

(1) 条件より

$$z_{n+1}=(\cos 60°+i\sin 60°)z_n+2$$
$$=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}z_n+2$$

(2) $z_{n+1}-\alpha=\beta(z_n-\alpha)$

$$z_{n+1}=\beta z_n+(1-\beta)\alpha$$

(1)より

$$\beta=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad (1-\beta)\alpha=2$$
$$\therefore\ \alpha=\frac{2}{1-\beta}=\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}=1+\sqrt{3}\,i$$

(3) $z_{n+1}-\alpha=\beta(z_n-\alpha)$ より

$$z_n-\alpha=\beta^n(z_0-\alpha)$$
$$\therefore\ z_n=\beta^n(z_0-\alpha)+\alpha=\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n\cdot(-\sqrt{3}\,i)+1+\sqrt{3}\,i$$

(4) (3)の結果より

$$z_n-(1+\sqrt{3}\,i)=\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n\cdot(-\sqrt{3}\,i)$$
$$|z_n-(1+\sqrt{3}\,i)|=\left|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right|^n\cdot|-\sqrt{3}\,i|$$
$$\therefore\ |z_n-(1+\sqrt{3}\,i)|=\sqrt{3}$$

よって，z_n は点 $1+\sqrt{3}i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上にのる

> 補4
> 偏角 θ が $0°$ より大きく $90°$ より小さい複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ を考える．$z_0=0$，$z_1=1$ とし $z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})$ $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ により $\{z_k\}$ を定義する．
> $k\geqq 0$ に対して複素数 z_k の表す複素数平面上の点を P_k とする．
> (1)　z_k を α を用いて表せ．
> (2)　複素数 $\dfrac{1}{1-\alpha}$ が表す複素数平面上の点を A とするとき，$\mathrm{AP}_0=\mathrm{AP}_1=\mathrm{AP}_2$ が成り立つことを示せ．
> (3)　P_0，P_1，P_2，$\cdots\cdots$，P_k，$\cdots\cdots$ は同一円周上にあることを示せ．

解説

(1) $z_k-z_{k-1}=\alpha(z_{k-1}-z_{k-2})$

$$z_k-z_{k-1}=\alpha^{k-1}(z_1-z_0)$$

$$\therefore\ z_k-z_{k-1}=\alpha^{k-1}$$

$k\geqq 1$ のとき，$z_k=z_0+\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\alpha^n=0+\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}=\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$

$k=0$ のときもこれを満たすから

$$z_k=\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$$

(2) $\mathrm{AP}_0=\left|z_0-\dfrac{1}{1-\alpha}\right|=\left|-\dfrac{1}{1-\alpha}\right|=\dfrac{1}{|1-\alpha|}$

$$\mathrm{AP}_1=\left|z_1-\frac{1}{1-\alpha}\right|=\left|1-\frac{1}{1-\alpha}\right|=\frac{|-\alpha|}{|1-\alpha|}=\frac{1}{|1-\alpha|}$$

$$\mathrm{AP}_2=\left|z_2-\frac{1}{1-\alpha}\right|=\left|\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right|=\frac{|-\alpha^2|}{|1-\alpha|}=\frac{|\alpha|^2}{|1-\alpha|}=\frac{1}{|1-\alpha|}$$

よって，$\mathrm{AP}_0=\mathrm{AP}_1=\mathrm{AP}_2$

(3) $\mathrm{AP}_k=\left|z_k-\dfrac{1}{1-\alpha}\right|=\left|\dfrac{1-\alpha^k}{1-\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}\right|=\dfrac{|-\alpha^k|}{|1-\alpha|}=\dfrac{|\alpha|^k}{|1-\alpha|}=\dfrac{1}{|1-\alpha|}$

よって，点 P_k は点 A を中心とする半径 $\dfrac{1}{|1-\alpha|}$ の円周上にある

したがって，P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_k，$\cdots$ は，すべて点 A を中心とする半径 $\dfrac{1}{|1-\alpha|}$ の円周上にある