

高3理系数学 標準問題演習 2.極限(2)

1 [2001 岡山理科大]

無限級数 $x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+x)^3} + \cdots$ ($x \neq -1$) について、次の設問に答えよ。

- (1) 無限級数が収束するような実数 x の範囲を求めよ。
- (2) (1)で求めた x の範囲で、無限級数の和を $f(x)$ として、関数 $y=f(x)$ のグラフを描け。

2 [2002 近畿大]

級数の和について

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n\pi = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$$

が成り立つ。

3 [1999 神戸商船大]

図のように、動点 P が原点 O から出発して、 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ と進んでいく。ただし、 $OP_1 = a$ で

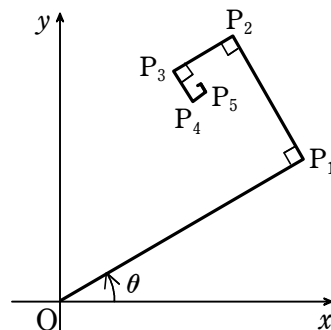
$$P_1P_2 = \frac{1}{2}OP_1, \quad P_2P_3 = \frac{1}{2}P_1P_2, \quad \cdots,$$

$$P_{n-1}P_n = \frac{1}{2}P_{n-2}P_{n-1}, \quad \cdots,$$

$$OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \cdots + P_{n-1}P_n + \cdots = 10$$

である。このとき、次の各問いに答えよ。

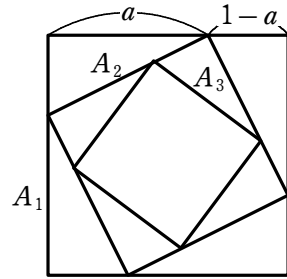
- (1) a の値を求めよ。
- (2) $\theta = 0$ のとき、点 P が近づいていく点 Q の座標を求めよ。
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、点 P が近づいていく点 R の座標を求めよ。



高3理系数学 標準問題演習 2.極限(2)

4 [2009 広島大]

1 辺の長さが 1 の正方形 A_1 がある。 A_1 の各辺を、時計回りにそれぞれ $a : (1-a)$ ($0 < a < 1$) に内分する点を結んでできる正方形を A_2 とする。同様の手続きで、正方形 A_k から正方形 A_{k+1} を作る ($k=1, 2, \dots$)。正方形 A_k の面積を S_k とするとき、次の問いに答えよ。



- (1) S_2 を a の式で表せ。
- (2) S_k を k と a の式で表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束することを示し、その和 S を a の式で表せ。
- (4) S を最小にする a を求めよ。

5 [1999 釧路公立大]

$\triangle ABC$ において、 $AB=4$, $AC=3$, $BC=5$ であって、円 O_1 は 3 辺に接する円、円 O_2 は AB , BC に接し、かつ円 O_1 に外接する円で、以下同様に円 O_3 , 円 O_4 , $\dots$, 円 O_n を作るとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 円 O_1 の面積を求めよ。
- (2) 円 O_2 の面積を求めよ。
- (3) 円 O_1 , O_2 , $\dots$, O_n の面積の総和を求めよ。
- (4) $n \longrightarrow \infty$ のとき、(3) の面積の総和はどうなるか。

ただし、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ($|r| < 1$) であることを知っているものとする。

6 [お茶の水女子大]

数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n = 0$ が成り立つとき、

$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ の値を求めよ。

高3理系数学 標準問題演習 2.極限(2)

7 [2010 大阪教育大]

n は自然数とし、 $t > 0$ とする。

(1) 次の不等式を示せ。

$$(1+t)^n \geq 1+nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2$$

(2) $0 < r < 1$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+t)^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} nr^n$$

(3) $x \neq -1$ のとき、次の和 S_n を求めよ。

$$S_n = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}nx^{n-1}$$

(4) $0 < x < 1$ のとき、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を $A(x)$ とおく。 $A(x)$ を求めよ。

さらに、極限値 $\lim_{x \rightarrow 1-0} A(x)$ を求めよ。

8 [I. 2008 津田塾大 II. 杏林大]

I. (1) m を自然数とする。 $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を求めよ。

(2) $\frac{1}{2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1$ を示せ。

II. 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するものについてはその和を求め、発散するものについてはその理由を求めよ。

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

$$(2) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots$$

$$(3) \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} + \cdots$$

9 [富山大]

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について、

(1) 「級数が収束すれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 」であることを証明し、この命題の対偶を述べよ。

(2) a_n がそれぞれ次のとき、級数の収束、発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$(i) a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(ii) a_n = \frac{n}{n+1}$$

