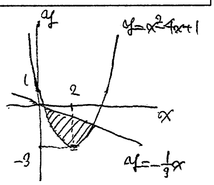
81 ［福岡大］

x, y が 2 つの不等式 $3y \leqq -x,\ y \geqq x^2-4x+1$ を満たすとき，$p=\dfrac{y}{x}$ の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である．また，このとき，$q=\dfrac{x^2}{3x^2+4xy+4y^2}$ の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である．

$$\begin{cases} 3y \leqq -x \Leftrightarrow y \leqq -\frac{1}{3}x \\ y \geqq x^2-4x+1 \Leftrightarrow y \geqq (x-2)^2-3 \end{cases}$$

を満たす領域をDとする

Dは図の斜線部（境界含む）



$p=\dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y=px$ がDと共有点をもつとき

$\dfrac{y}{x}=p$ となる (x, y) が存在するから

そのときの p の範囲を求めればよい

$y=x^2-4x+1$ と $y=px$ が接するとき

$x^2-4x+1=px$ として

$x^2-(p+4)x+1=0$

が重解をもてばよいから

判別式をDとしてD$=0$ より

$(p+4)^2-4=0$

$p^2+8p+12=0$

$(p+2)(p+6)=0$　$\therefore p=-2, -6$

接点 $x=1$　$x=-1$（不適）

よって

$-2 \leqq p \leqq -\dfrac{1}{3}$

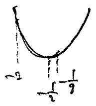
$q=\dfrac{x^2}{3x^2+4xy+4y^2}$

$=\dfrac{1}{4\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\cdot\frac{y}{x}+3}$

$p=\dfrac{y}{x}$ とおくと

$=\dfrac{1}{4p^2+4p+3}$

$=\dfrac{1}{4\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+2}$



$-2 \leqq p \leqq -\dfrac{1}{3}$ で　$2 \leqq 4\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2+2 \leqq 11$ より

$\dfrac{1}{11} \leqq q \leqq \dfrac{1}{2}$

82 ［同志社大］

x, y が 2 つの不等式 $y \geqq \dfrac{x}{2},\ y \leqq -x^2+3x-\dfrac{1}{4}$ を満たすとき，

$P=\dfrac{x^2}{2x^2-2xy+y^2}$

のとり得る値の最大値と最小値を求めよ．

83 ［藤田保健衛生大］

(1) 点 $(2, 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．このとき (1) を利用して $\dfrac{1-\sin\theta}{2-\cos\theta}$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x^2+y^2=1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線は

$x_1x+y_1y=1$

これが $(2, 1)$ を通るとき

$2x_1+y_1=1$　$\therefore y_1=-2x_1+1$

(x_1, y_1) は $x^2+y^2=1$ 上の点より

$x_1^2+y_1^2=1$

$x_1^2+(2x_1-1)^2=1$

$5x_1^2-4x_1=0$

$x_1(5x_1-4)=0$　$\therefore x_1=0, \dfrac{4}{5}$

$y_1=1, -\dfrac{3}{5}$

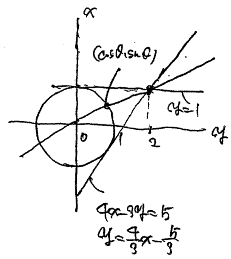
よって

$y=1,\ 4x-3y=5$

(2) $x^2+y^2=1$ 上の点は $(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおける

$\dfrac{1-\sin\theta}{2-\cos\theta}$ は $(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(2, 1)$ とを結ぶ直線の傾きと等しいから (1) より

$0 \leqq \dfrac{1-\sin\theta}{2-\cos\theta} \leqq \dfrac{4}{3}$



84 ［東京理科大］

(1) 点 $(3, 2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の傾きを求めよ．

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-x \leqq 1 \end{cases}$ のとき，$k=\dfrac{y-2}{x-3}$ の最大値および最小値を求めよ．

(3) $\sin\theta-\cos\theta \leqq 1$ のとき，$\dfrac{\sin\theta-2}{\cos\theta-3}$ の最大値および最小値を求めよ．

85 ［2006 青山学院大］

θ に関する方程式 $\sin\theta-k\cos\theta=2(1-k)$ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をもつように定数 k の値の範囲を定めよ．

86

(1) $x>-1$ のとき，$\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2) $x>-1$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値を求めよ．

(3) x がすべての実数を動くとき，$\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x-3)+5}{x+1}$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & -2 & 2 \\ & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & 5 \end{array}$$

$=x-3+\dfrac{5}{x+1}$

$=x+1+\dfrac{5}{x+1}-4\geqq2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{5}{x+1}}-4=2\sqrt5-4$ (相加相乗)

等号成立は $x+1=\dfrac{5}{x+1}$

$(x+1)^2=5$　∴ $x=-1+\sqrt5$ のとき

このとき最小値をとり

最小値 $2\sqrt5-4$

(2) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}}\leqq\dfrac{1}{\underset{2(\sqrt5-2)}{2\sqrt5-4}}=\dfrac{\sqrt5+2}{2}$

最大値 $\dfrac{\sqrt5+2}{2}$

(3) $\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}=k$ とおく

x がすべての実数
→ そのままでは相加相乗は×
∵ $x>-1$, $x<-1$ で場合分けして相加相乗
$x+1=\cdots$ とおく
∴ 実数条件

$k(x^2-2x+2)=x+1$

$kx^2-(2k+1)x+2k-1=0$

$k=0$ のとき $-x-1=0$　∴ $x=-1$ ($x=-1$ のとき $k=0$ の値をとる)

$k\neq0$ のとき

x は実数であるから

判別式を D とすると $D\geqq0$ より

$D=(2k+1)^2-4k(2k-1)$

$=-4k^2+8k+1\geqq0$

$4k^2-8k-1\leqq0$

∴ $\dfrac{2-\sqrt5}{2}\leqq k\leqq\dfrac{2+\sqrt5}{2}$, $k\neq0$

よって

最大値 $\dfrac{2+\sqrt5}{2}$，最小値 $\dfrac{2-\sqrt5}{2}$

87 [東京理科大]

(1) $x>-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=\dfrac{x^2-2x+5}{8x+4}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x>-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=\dfrac{8x+4}{x^2-2x+5}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) x が実数のとき，$y=\dfrac{8x+4}{x^2-2x+5}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

88 [2003 上智大]

(1)　k を実数の定数とする．実数 x，y が $x+2y=k$ を満たすとき，x^2+2y^2 の最小値を求めよ．

(2)　2変数関数 $f(x,\ y)=\dfrac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}$ の最大値を求めよ．

89 [(1) 上智大　(2) 2005 上智大]

(1) 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ は $x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる．

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x+1}$ の最大値が3，最小値が $\dfrac{1}{3}$ であるとき，a，b の値を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}=y$

$x^2+x-1=y(x^2-x+1)$

$(y-1)x^2-(y+1)x+y+1=0$

$y=1$ のとき $-2x+2=0$　∴ $x=1$ ($x=1$ のとき $y=1$ をとる)

$y\neq1$ のとき

x は実数であるから

判別式を D とすると $D\geqq0$ より

$D=(y+1)^2-4(y-1)(y+1)$

$=-3y^2+2y+5\geqq0$

$3y^2-2y-5\leqq0$　$\begin{matrix}3 & -5\\ 1 & 1\end{matrix}$

$(y+1)(3y-5)\leqq0$

∴ $-1\leqq y\leqq\dfrac{5}{3}$，$y\neq1$

最大値 $\dfrac{5}{3}$ ($x=2$)

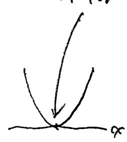
小　-1 ($x=0$)

$2x^2-8x+8=0$

$-2x^2=0$

(2) $\dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x+1}\leqq3$ がすべての x で成り立てばよい

(等号が成り立つ x が存在する)



$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1\leqq3(x^2+ax+b)\\ x^2+ax+b\leqq3(x^2-x+1)\end{cases}$

$\begin{cases}2x^2+(3a+1)x+3b-1\geqq0\\ 2x^2-(a+3)x-b+3\geqq0\end{cases}$

$2x^2+(3a+1)x+3b-1=0$，$2x^2-(a+3)x-b+3=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 として $D_1=0$，$D_2=0$ となればよい

$D_1=(3a+1)^2-8(3b-1)=0$　　$(3a+1)^2-3\cdot8b+8=0$

$D_2=(a+3)^2-8(-b+3)=0$　　$8b=24-(a+3)^2$

$(3a+1)^2-3[24-(a+3)^2]+8=0$

$9a^2+6a+1+3(a^2+6a+9)-64$

$12a^2+24a-36=0$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$　∴ $a=-3,\ 1$

よって

$(a,\ b)=(-3,\ 3),\ (1,\ 1)$

90 [Ⅰ．浜松医科大　Ⅱ．学習院大]

Ⅰ．$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値，最小値を求めよ．またそのときの x の値も求めよ．

Ⅱ．関数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+ax+b}$

(1) $f(x)$ が最大値および最小値をもつとき，a と b の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値が1，最小値が -1 であるとき，a と b の値を求めよ．

91 [(1) 2006 釧路公立大　(2) 2015 産業医科大]

(1) 実数 a，b が $a>-1$，$b>-2$ であるとき，次の式の最小値を求めよ。

$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}$$

(2) $x>0,\ y>0,\ z>0$ のとき，$\dfrac{9xyz}{x^2y+18y^2z+12z^2x}$ の最大値は $\boxed{\quad}$ である．

(1)
$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}=2(b+2)+\frac{2}{a+1}+\frac{2(a+1)}{b+2}-4$$
$$\ge 3\sqrt[3]{2(b+2)\cdot\frac{2}{a+1}\cdot\frac{2(a+1)}{b+2}}-4 \quad \text{（相加相乗平均）}$$
$$=2$$

等号成立は

$$b+2=\frac{1}{a+1}=\frac{a+1}{b+2}$$

$$\begin{cases} b+2=\dfrac{1}{a+1} \\ \dfrac{(a+1)^2}{b+2}=1 \end{cases}$$　$(a+1)^3=1$　∴ $a=0,\ b=-1$ のとき

このとき最小値をとり　最小値は 2

(2)
$$\frac{9xyz}{x^2y+18y^2z+12z^2x}=\frac{9}{\frac{x}{z}+18\frac{y}{x}+12\frac{z}{y}}$$

相加相乗平均より

$$\frac{x}{z}+18\cdot\frac{y}{x}+12\frac{z}{y}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{z}\cdot\underset{2\times3\times3}{18}\cdot\frac{y}{x}\cdot\underset{2\times2\times3}{12}\cdot\frac{z}{y}}=18$$

等号成立は

$\dfrac{x}{z}=18\cdot\dfrac{y}{x}=12\cdot\dfrac{z}{y}=k$ とおくと

$$\begin{cases} x=kz \\ y=\dfrac{k}{18}x \\ z=\dfrac{k}{12}y \end{cases}$$

すべてかけて

$xyz=\dfrac{k^3}{6^3}xyz$

∴ $k=6$

∴ $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=z$

∴ $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=z$ のとき

このとき最小値をとり　最小値は 18

よって求める最大値は $\dfrac{1}{2}$

92 [2021 早稲田大]

正の実数 x，y，z が $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1$ を満たすとき，$(x-1)(y-2)(z-3)$ の最小値は

$\boxed{\quad}$ である。

93

(1) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の最小値を求めよ．

(2) $x>0$ のとき，$f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ の最小値を求めよ．

(3) $x>0$ のとき，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ の最小値を求めよ．

(1) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}\ge 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}=2$ （相加相乗平均）

等号成立は

$x^2=\dfrac{1}{x^2}$

$x^4=1$　∴ $x=\pm1$

このとき最小値をとり　最小値 2

(2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

$$=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

等号成立は

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{x^2}$

$x^3=2$　∴ $x=\sqrt[3]{2}$

このとき最小値をとり　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

(3) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

$$=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\ge\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

等号成立は

$x^2=\dfrac{1}{2x}$

$x^3=\dfrac{1}{2}$　∴ $x=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

このとき最小値をとり　最小値 $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

94 [(1)～(3) 早稲田大　(4) 慶応義塾大]

(1) $x,\ y$ の間に $xy=4\ (x>0,\ y>0)$ の関係があるとき，$2x+3y$ の最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{2},\ x>2,\ y>2$ のとき，$2x+y$ の最小値を求めよ．

(3) $x>0$ のとき，$3x+\dfrac{1}{x^3}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(4) $x,\ y$ を正の実数とするとき，$27x+\dfrac{3x}{y^2}+\dfrac{2y}{x}$ は $x=\boxed{\quad}$，$y=\boxed{\quad}$ において最小値 $\boxed{\quad}$ をとる．

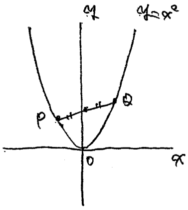
95 [東京大]

放物線 $y=x^2$ 上に2点 P, Q がある．線分 PQ の中点の y 座標を h とする．
(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ．
(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ．

(1) $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ とおく

PQの傾きが m より

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=m \quad \therefore \alpha+\beta=m$$



PQの中点の y 座標が h より

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=h$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2h$$

$$m^2-2\alpha\beta=2h \quad \therefore \alpha\beta=\frac{m^2-2h}{2}$$

$$L^2=(\alpha-\beta)^2+(\underbrace{\alpha^2-\beta^2}_{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)})^2$$

$$=(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}$$

$$=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\}$$

$$=\{m^2-2(m^2-2h)\}(1+m^2)$$

$$=(-m^2+4h)(1+m^2)$$

$$-m^2+4h=\frac{L^2}{1+m^2}$$

$$\therefore h=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right)$$ //

(2) i) $L\geqq 1$ のとき

$$h=\frac{1}{4}\left(1+m^2+\frac{L^2}{1+m^2}-1\right)\geqq\frac{1}{4}(2L-1)$$

等号成立は

$$1+m^2=\frac{L^2}{1+m^2}$$

$\therefore 1+m^2=L$　$m=\pm\sqrt{L-1}$ のとき

このとき最小値をとり　最小値は $\frac{1}{4}(2L-1)$

ii) $0<L<1$ のとき

$1+m^2=t$ とおくと $t\geqq 1$.

$$h=\frac{1}{4}\left(t+\frac{L^2}{t}-1\right) \rightarrow \text{ビブン(数Ⅲ)}$$

96 [2012 東京理科大]

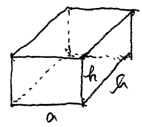
座標平面上において，放物線 $y=x^2$ 上に異なる2点 P，Q をとり，線分 PQ の中点を M とし，M の座標を (a, b) とする。
(1) $a=1$，$b=3$ のとき，線分 PQ の長さ PQ を求めよ。
(2) PQ$=4$ のとき，b を a の式で表せ。
(3) PQ$=4$ を満たしながら P，Q を動かすとき，b の最小値を求めよ。

97 [2005 岩手大]

直方体の体積を k^3 とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれ，a，b，h とする。
(1) 直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき，対角線の長さの2乗の最小値を求めよ。
(2) 体積が k^3 である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

(1) 題意より

$$abh=k^3 \quad \therefore b=\frac{k^3}{ah}$$



対角線の長さの2乗は

$$a^2+b^2+h^2=a^2+\frac{k^6}{a^2h^2}+h^2 \quad (h:\text{定数})$$

$$\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{k^6}{a^2h^2}}+h^2=\frac{2k^3}{h}+h^2$$

等号成立は

$$a^2=\frac{k^6}{a^2h^2}$$

$$a^4=\frac{k^6}{h^2} \quad \therefore a=\frac{k\sqrt{k}}{\sqrt{h}}, \quad b=\frac{k\sqrt{k}}{\sqrt{h}}$$

このとき最小値をとり　最小値は $\frac{2k^3}{h}+h^2$ //

(2)
$$a^2+\frac{k^6}{a^2h^2}+h^2\geqq 3\sqrt[3]{a^2\cdot\frac{k^6}{a^2h^2}\cdot h^2}=3k^2 \quad (h:\text{変数})$$

等号成立は

$$a^2=\frac{k^6}{a^2h^2}=h^2$$

$$\begin{cases} a^4h^2=k^6 \\ a^2h^4=k^6 \end{cases}$$

$$\frac{h^2}{a^2}=1$$

$$a^2=h^2$$

$$\therefore a=h$$

$k^3=a^2h$ より

$$b=\frac{a^2h}{ah}=a$$

$$\therefore a=b=h$$

このとき，すなわち立方体となるとき最小となる

98 [大阪市立大]

(1) a, b, c を正数とするとき，不等式 $\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．
(2) 周の長さが一定である三角形のうちで内接円の半径が最大のものを求めよ．

99 [2003 慶応義塾大]

b_1, b_2, b_3 を正の実数とする．$a_1=b_1^{\,3}$, $a_2=b_2^{\,3}$, $a_3=b_3^{\,3}$ とするとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{{}^{ア}\boxed{}}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

となる．したがって，$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ であり，等号は $a_1=a_2=a_3$ のときに限り成立する．この不等式を用いれば，正の実数 a，b に対して，

$4(a^2+ab)^3\geqq 3^3(a^2b)^{{}^{イ}\boxed{}}$ が得られる．

底面が半径 a の円，高さが b の直円柱を考える．不等式の等号成立条件から，表面積を一定にして体積を最大にしたとき，$b={}^{ウ}\boxed{}\,a$ である．

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{3}(b_1^3+b_2^3+b_3^3-3b_1b_2b_3)$$

$$=\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_1b_2-b_2b_3-b_3b_1)$$

$$=\frac{1}{\boxed{6}}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ より

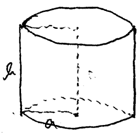
$(a_1+a_2+a_3)^3\geqq 3^3a_1a_2a_3$

ここで $a_1=a^2$, $a_2=\frac{ab}{2}$, $a_3=\frac{ab}{2}$ とすると

$(a^2+ab)^3\geqq 3^3a^2\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{ab}{2}$

∴ $4(a^2+ab)^3\geqq 3^3(a^2b)^{\boxed{2}}$

表面積が一定より



$2\pi a^2+2\pi ab=k$ (一定)

∴ $2\pi(a^2+ab)=k$

体積は

$\pi a^2b\leqq\underbrace{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(a^2+ab)^{\frac{3}{2}}}_{一定値}$

等号成立は

$a^2=\frac{ab}{2}$

∴ $b=\boxed{2}a$ のとき

100 [2021 札幌医科大]

体積が $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ の直円錐において，直円錐の側面積の最小値を求めよ。ただし直円錐とは，底面の円の中心と頂点とを結ぶ直線が，底面に垂直である円錐のことである。