

初等幾何 1. 三角形の性質

[1]

(1) 図のように AC 上に

$AB=AD$ とし、点 $D \in AC$ と

$$\angle ABD = \angle ADB = \alpha$$

$$\angle B = \angle ABD + \angle DBC = \alpha + \angle DBC \dots ①$$

$$\angle ADB = \angle C + \angle DBC \text{ より}$$

$$\angle C = \angle ADB - \angle DBC = \alpha - \angle DBC \dots ②$$

①, ② より

$$\angle B > \angle C$$

(2) θ の否定は

「 $\angle B > \angle C$ である. $AC \leq AB$ である θ が存在する」

$AC \leq AB$ と仮定すると、より

$$\angle B \leq \angle C$$

より (1) に矛盾する

よって θ は示された

<point>

1. 証明の基本.

2. $p \rightarrow q$ の否定

$\overline{p \rightarrow q} = p \wedge \overline{q}$ である θ が存在する

p が満たす θ の集合 $\in P$

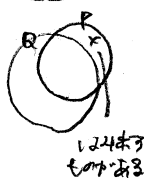
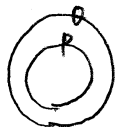
q " θ とする

$p \rightarrow q$ が真 $\Leftrightarrow P \subset Q$ である

この否定は

$P \not\subset Q$ が存在する

ということになる



124 本
もつてある

3. 本問の命題もよく使うものなので

覚えておいた方がよい.

[3]

(1) 三角形の角度を求めよ

$$\begin{cases} 2 < \alpha + (4 - \alpha) & \text{常に成り立つ} \\ \alpha < 2 + (4 - \alpha) & \alpha < 3 \\ 4 - \alpha < 2 + \alpha & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 < \alpha < 3$$

[別解 I]

$$|\alpha - (4 - \alpha)| < 2 < \alpha + (4 - \alpha)$$

$$2|\alpha - 2| < 2$$

$$|\alpha - 2| < 1$$

$$-1 < \alpha - 2 < 1 \quad \therefore 1 < \alpha < 3$$

(2) 全角は三角形であるとき

最も内角が全角で成り立つ.

[1] より最も内角が最も長い辺に接する

(1) $2 < \alpha < 3$ のとき

θ の最も長い

$$\alpha^2 < 2^2 + (4 - \alpha)^2$$

$$\alpha^2 < 20 - 8\alpha + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha < \frac{5}{2}$$

$$2 < \alpha < 3 \text{ より } 2 < \alpha < \frac{5}{2}$$

(2) $\alpha = 2$ のとき

$\triangle ABC$ は正三角形となり、鋭角三角形

(3) $1 < \alpha < 2$ のとき

AC が最も長い

$$(4 - \alpha)^2 < 2^2 + \alpha^2$$

$$(6 - 8\alpha + \alpha^2) < 4 + \alpha^2$$

$$\therefore \alpha > \frac{3}{2}$$

$$1 < \alpha < 2 \text{ より } \frac{3}{2} < \alpha < 2$$

(4) (1) (2) より

$$\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$$

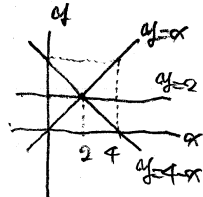
<point>

1. 三角形の角度を求めよ

$\triangle ABC$ の 3 辺 a, b, c のとき

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow (b - c) < a < (b + c)$$

* 1 辺の長さが他の 2 辺の長さの和より小さい



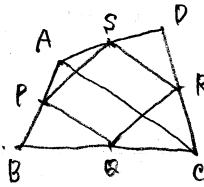
2. $\angle A$ 全角 $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
 $\angle A$ 直角 $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$
 $\angle A$ 鈍角 $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

[7]

① 中点連結定理より

$$PQ \parallel AC, PQ = \frac{1}{2}AC$$

$$RS \parallel AC, RS = \frac{1}{2}AC$$



よって

$$PQ \parallel RS, PQ = RS \text{ である}$$

四角形 PQRS は平行四辺形

② 平行四辺形 PQRS の対角線は互に二等分される

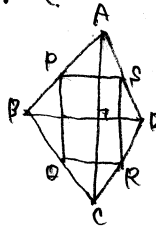
対角線の交点 O は

四角形 PQRS の重心である

中点連結定理より

$$AC \parallel PQ$$

$$BD \parallel PS$$



よって対角線の交点 O は

$\angle OPS$ に等しい

四角形 PQRS は長方形である

$\angle OPS = 90^\circ$ より 証明された

③ 平行四辺形 PQRS の対角線は互に二等分される

よって、四角形 PQRS は長方形である

四角形 PQRS は長方形である

四角形 PQRS は長方形である

$$a + b = c + d \quad \text{①}$$

$$a + d = b + c \quad \text{②}$$

① - ② より

$$b - d = d - b \quad \therefore b = d$$

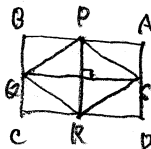
よって $PQ = RS$ となる

四角形 PQRS は長方形である

このとき四角形 APQR は

長方形となる

よって対角線は互に二等分される



<point>

1. 中点連結定理

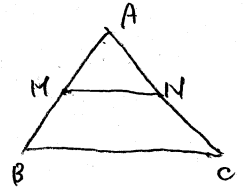
$\triangle ABC$ において

AB の中点 M

AC の中点 N とすると

$$MN \parallel BC$$

$$MN = \frac{1}{2}BC$$

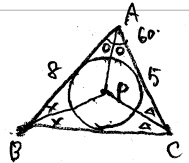


[8]

① $B + C = 120^\circ$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 60^\circ$$

$$\angle BPC = (90^\circ - (\frac{B}{2} + \frac{C}{2})) = 120^\circ$$



② 余弦定理より

$$BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

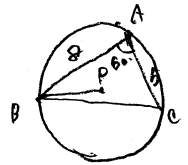
$$= 49$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 7$$

正弦定理より

$$2BP = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$

$$BP = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



③ $\triangle ABC$ の面積 S は

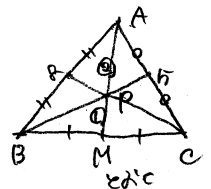
$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

P は $\triangle ABC$ の重心より

$$AP : PM = 2 : 1 \text{ より}$$

$\triangle PBC$ の面積 S' は

$$S' = \frac{1}{3}S = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$



<point>

1. 内心、外心、重心とそれらの性質

内心: 内接円の中心

各内角の二等分線の交点

外心: 外接円の中心

各辺の垂直二等分線の交点

重心: 中線の交点

各中線の交点、互に 2:1 に分かれる

[16]

$\triangle APP$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{3}$ より

$$BP:PC=1:2$$

$BP:PC=AP:AC$ であるから

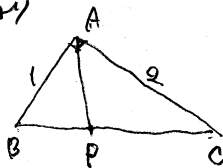
角の二等分線の定理より

AP は $\angle A$ の二等分線である

$$\therefore \angle BAP = 45^\circ$$

<point>

1. 角の二等分線の定理より



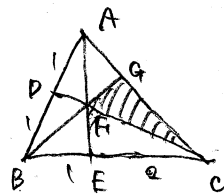
[20]

角の二等分線の定理より

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

$$\therefore \frac{CG}{GA} = 2 \quad \therefore CG:GA = 2:1$$



$\triangle APQ$ と DC でメネラウスの定理より

$$\frac{GC}{CA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BF}{FG} = 1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{BF}{FG} = 1$$

$$\therefore \frac{BF}{FG} = \frac{3}{2} \quad \therefore BF:FG = 3:2$$

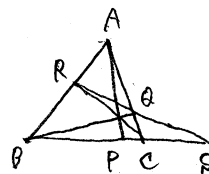
$\therefore$

$$\begin{aligned} \triangle CFG &= \frac{2}{5} \triangle BCG \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

[28]

$\triangle ABC$ と RS でメネラウスの定理より

$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \dots ①$$



角の二等分線の定理より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \dots ②$$

①, ②より

$$\frac{BS}{SC} = \frac{BP}{PC}$$

$$\frac{BP}{BS} = \frac{CP}{CS}$$

$$\therefore BP:BS = CP:CS \text{ である}$$

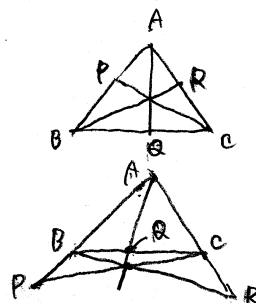
<point>

1. 角の二等分線の定理

$\triangle ABC$ において

AB, BR, CP が1点で交わる

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$



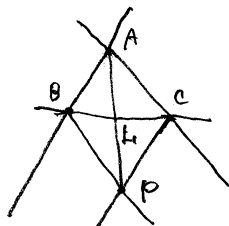
[20]

$\angle B, \angle C$ の外角の二等分線

交点を P と AP と BC の

交点を L とすると

外角の二等分線の定理より



$$\frac{AP}{PL} = \frac{AB}{BL} \dots ①$$

$$\frac{AP}{PL} = \frac{AC}{CL} \dots ②$$

①, ②より

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}$$

$$\therefore BL:LC = AB:AC$$

$\therefore AP$ は $\angle A$ の二等分線より

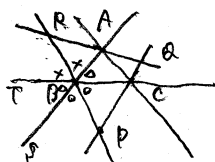
定理により示すことができる。

④) 図のように仮に P, Q, R とすると

$$\angle PBS = \angle PBC$$

$$\angle RBA = \angle RPT$$

$$\angle ABC = \angle SPT \text{ (対頂角)}$$



$\therefore$

$$\angle PPR = 180^\circ$$

$\therefore B$ は RP 上にあり

同様に C は PQ 上、 A は QR 上にあり

定理により示すことができる。

<point>

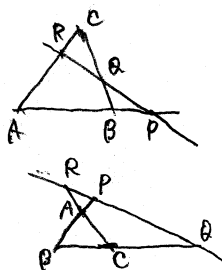
(さらに $\triangle ABC$ の内角を、
1. 仮定 $(\triangle PQR$ の中心とすると)

2. ヌネウス定理

$\triangle ABC$ において

P, Q, Rは一直線上にある

$$\Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$



[26]

図のように中線E

AM, BN, CLとすると

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1 \text{ である}$$

チェバの定理の逆より

AM, BN, CLは1点で交わる

この点をGとすると

中点連結定理より

$$LM \parallel AC, LM = \frac{1}{2}AC$$

$\triangle LMG$ と $\triangle CAG$ は相似 (1:2) である

$$AG:GM = 2:1$$

同様にして

$$BG:GN = CG:GL = 2:1 \quad \square$$

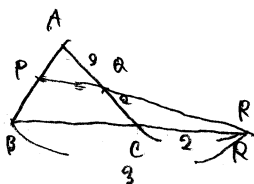
[27]

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{2} = 1 \text{ である}$$

ヌネウス定理の逆より

P, Q, Rは一直線上にある $\square$



[29]

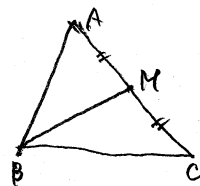
中点定理より

$$BA^2 + BC^2 = 2(CM^2 + AM^2)$$

$$16 + 49 = 2(BM^2 + 4^2)$$

$$2BM^2 = 99$$

$$BM^2 = \frac{99}{2} \quad \therefore BM = \frac{\sqrt{66}}{2} //$$



[30]

中点定理より

$$AD^2 + BD^2 = 2(AM^2 + DM^2)$$

AMは一定であるから

DMが最小になるとき

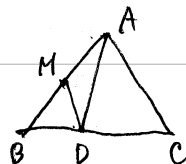
AD+BDが最小

a. $B < 90^\circ$ のとき

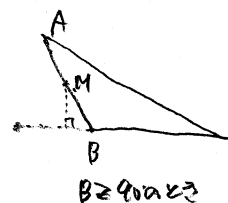
BからMからBCに下ろした垂線が足になるとき

b. $B \geq 90^\circ$ のとき

D=Bのとき



$B < 90^\circ$ のとき



$B \geq 90^\circ$ のとき

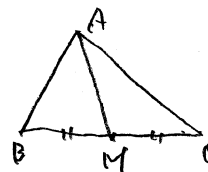
<point>

1. 中点定理

$\triangle ABC$ において

AMが中線であるとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$



<point>

1. チェバの定理, ヌネウス定理の逆