

第1章 積分計算

1.1 積分の基本(1)

(1) 不定積分

既に学んだように、関数 $f(x)$ に対して、微分すると $f(x)$ になる関数を、 $f(x)$ の不定積分または原始関数といい、記号 $\int f(x)dx$ で表す。

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると、 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad C \text{ は積分定数}$$

と表される。このとき、 $f(x)$ を被積分関数、 x を積分変数という。

不定積分を求めるには、導関数の公式が逆に利用される。

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha} \quad (\alpha \text{ は実数}) \quad (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

よって、 x^n の不定積分について、次の公式が得られます。ただし、 C は積分定数である。

x^n の不定積分

$$\int x^n dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{ただし, } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

☞ $\int \frac{1}{f(x)} dx$ を $\int \frac{dx}{f(x)}$ と表してもよい。

不定積分について次の等式が成り立つ。

不定積分の基本性質 (線形性)

k, l は定数とする

$$1. \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$2. \int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int \{kf(x) + lg(x)\}dx = k \int f(x)dx + l \int g(x)dx$$

㊦ 不定積分の等式では、各辺の積分定数を適当に定めると、その等式が成り立つことを意味している。

(2) 定積分

既に学んだように、関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は次のようになる。
ここで、下端 a と上端 b の大小関係は $a < b$, $a = b$, $a > b$ のいずれであってもよい。

定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき、区間に属する 2 つの実数 a, b に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

また、区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、
 $y = f(x)$ のグラフと x 軸、および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す。

定積分について次の等式が成り立つ。

定積分の性質

k, l は定数とする

$$1. \int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$3. \int_a^b \{k f(x) + l g(x)\}dx = k \int_a^b f(x)dx + l \int_a^b g(x)dx$$

$$4. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$5. \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

$$6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

例1

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2 dx$$

$$(2) \int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x} dx$$

解説

$$(1) \text{与式} = \int_0^1 (x^2 + 1 + x + 2x - 2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 - \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{15-8}{10} = \frac{7}{10}$$

$$(2) \int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x} dx = \int \frac{x-4\sqrt{x}+4}{x} dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= x - 8\sqrt{x} + 4\log|x| + C$$

(3) $f(ax+b)$ の積分

a, b は定数とする。関数 $f(x)$ の1つの不定積分 $F(x)$ を用いて、合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分を求めることを考える。

合成関数の微分法により

$$\{F(ax+b)\}' = aF'(ax+b) = af(ax+b)$$

となるから、次の公式が成り立つ。

 $f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$, $a \neq 0$ とするとき

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

注 不定積分で成り立つことは基本的に定積分でも成り立つので、今後、定積分については省略する。

例2

次の積分を計算せよ

(1) $\int \frac{x^2}{2-x} dx$

(2) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} dx$

解説

(1) $\frac{x^2}{2-x} = -x - 2 + \frac{4}{2-x}$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2-x} dx &= \int \left(-x - 2 + \frac{4}{2-x} \right) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} - 2x - 4\log|2-x| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(2) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$

(3) $\frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \sqrt{x+2} + \sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} dx &= \int (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) dx \\ &= \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}x + C = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + \sqrt{2}x + C \end{aligned}$$

例3

次の積分を計算せよ。

(1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

(3) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$

解説

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx &= \int_0^1 \{1-(1-x)\}\sqrt{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \{\sqrt{1-x} - \sqrt{(1-x)^3}\} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \left\{ \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx &= \int_0^1 \frac{(x+2)^2 - 4(x+2) + 4}{\sqrt{x+2}} dx \\
&= \int_0^1 \left\{ (x+2)^{\frac{3}{2}} - 4(x+2)^{\frac{1}{2}} + 4(x+2)^{-\frac{1}{2}} \right\} dx \\
&= \left[\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + 8(x+2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{64\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

〔注〕すべて置換積分でできるが、置換積分は最終手段として、なるべく使わない方向で計算するとよい。

(4) 三角関数・指数関数の積分

三角関数については

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(\frac{1}{\tan x} \right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

であるから、次の公式が成り立つ。

三角関数の不定積分

$$\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C & \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\frac{1}{\tan x} + C
\end{aligned}$$

例4

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int (x^2 + \sin 2x) dx$$

$$(2) \int \tan^2 x dx$$

解説

$$(1) \int (x^2 + \sin 2x) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

例5

次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x)(\tan x)' dx$$

$$= \left[\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3})^3}{3} = 2\sqrt{3}$$

指数関数については、

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \log a$$

であるから、次の公式が成り立つ。

指数関数の不定積分

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

例6

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 e^{3x} dx$$

$$(2) \int_0^5 a^{\frac{x}{5}} dx \quad (a > 0, a \neq 1)$$

解説

$$(1) \int_0^1 e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} = \frac{e^3 - 1}{3}$$

$$(2) \int_0^5 a^{\frac{x}{5}} dx = \left[\frac{5a^{\frac{x}{5}}}{\log a} \right]_0^5 = \frac{5}{\log a} (a - 1)$$

(5) $f(g(x)) g'(x)$ の積分

合成関数 $f(ax+b)$ の不定積分をより一般的に、関数 $f(x)$ の 1 つの不定積分 $F(x)$ を用いて、合成関数 $f(g(x)) g'(x)$ の不定積分を求めることを考える。

合成関数の微分法により

$$\{F(g(x))\}' = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

となるから、次の公式が成り立つ。

$f(g(x)) g'(x)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$ とするとき

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

例7

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int 2x(x^2+2)^2 dx \quad (2) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(3) \int \sin^3 x \cos x dx \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

$$(6) \int x \cos(x^2) dx \quad (7) \int x e^{x^2} dx \quad (8) \int_1^e \frac{\log x}{x} dx$$

解説

$$(1) \int 2x(x^2+2)^2 dx = \int (x^2+2)^2 (x^2+2)' dx = \frac{1}{3}(x^2+2)^3 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(2) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(3) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\sin x)' = \frac{\sin^4 x}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos \theta)'}{\cos^2 \theta} = \left[\frac{1}{\cos \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned}
(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} \right\} dx = \left[\tan x - \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= (1 - \sqrt{2}) - (-1) = 2 - \sqrt{2} \\
(6) \int x \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int \cos(x^2) \cdot (x^2)' dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
(7) \int x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\
(8) \int_1^e \frac{\log x}{x} dx &= \int_1^e \log x \cdot (\log x)' dx = \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例8

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^{\pi} \sin^3 x dx \qquad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx \qquad (3) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$$

解説

$$\begin{aligned}
(1) \int_0^{\pi} \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi} \sin^2 x \sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos^2 x \sin x) dx \\
&= \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \\
(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) \cos x dx \\
&= \left[\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos x dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) \cos x dx \\
 &= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

☞ $\sin, \cos$ の奇数乗を含む関数の積分は、奇数乗のうちのかけられているものの1つを微分因子として考えるとよい。