

理系標準問題演習 9. 極限 (9)

[1]

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

$$i) p = 0 \text{ のとき}$$

$$a_n = 2$$

$$ii) p = 1 \text{ のとき}$$

$$\{a_n\} \text{ は初項 } a_1 = 2$$

公差 2 の等差数列より

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2n$$

$$iii) p \neq 0, 1 \text{ のとき}$$

$$a_{n+1} = pa_n + q$$

$$d = pa_n + q$$

$$\therefore d = \frac{q}{1-p}$$

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p(a_n - \frac{q}{1-p})$$

$$\{a_n - \frac{q}{1-p}\} \text{ は初項 } a_1 - \frac{q}{1-p} = -\frac{qp}{1-p}$$

公比 p の等比数列より

$$a_n - \frac{q}{1-p} = -\frac{qp}{1-p} \cdot p^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{q(1-p^n)}{1-p}$$

from iii) より

$-1 < p < 1$ のとき $\{a_n\}$ は収束する

<point>

1. 2重数列の漸化式と極限

[2]

$$d) 2a_{n+2} = (r+3)a_{n+1} - (r+1)a_n \quad (n \geq 1)$$

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = (r+1)(a_{n+1} - a_n)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } b_n = a_2 - a_1 = 1 - r^2$$

$$2b_{n+1} = (r+1)b_n$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{r+1}{2} b_n$$

$$\{b_n\} \text{ は初項 } b_1 = 1 - r^2$$

公比 $\frac{r+1}{2}$ の等比数列より

$$b_n = (1-r^2) \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}$$

$$e) a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

$$= r^2 + (1-r^2) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{r+1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= r^2 + (1-r^2) \cdot \frac{1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{r+1}{2}}$$

$$= r^2 + 2(1+r) \left\{1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \text{from } n=1 \text{ のときも成り立つから}$$

$$a_n = r^2 + 2(1+r) \left\{1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$g) -1 < \frac{r+1}{2} < 1$$

$$-2 < r+1 < 2$$

$$\therefore -3 < r < 1$$

よって $\{a_n\}$ は収束する

$$a_n = r^2 + 2r + 2$$

<point>

1. 2重数列の漸化式と極限

[3]

$$I) a_1 = 3, b_1 = -2$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_n & \text{①} \\ b_{n+1} = -2a_n + 3b_n & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_n & \text{①} \\ b_{n+1} = -2a_n + 3b_n & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ より}$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1$ の定数列より

$$a_n + b_n = 1 \quad \text{③}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ より}$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 5(a_n - b_n)$$

$\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 5$

公比 5 の等比数列より

$$a_n - b_n = 5^n \quad \text{④}$$

$$\text{③}, \text{④} \text{ より}$$

$$a_n = \frac{1 + 5^n}{2}$$

$$b_n = \frac{1 - 5^n}{2}$$

$$\textcircled{B} a_1 = p, b_1 = 1-p$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + (1-p)b_n \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = (1-p)a_n + pb_n \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①+②より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1$ の定数列より

$$a_n + b_n = 1 \dots \textcircled{3}$$

①-②より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (2p-1)(a_n - b_n)$$

$\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 2p-1$

公比 $2p-1$ の等比数列より

$$a_n - b_n = (2p-1)^{n-1} \dots \textcircled{4}$$

③, ④より

$$a_n = \frac{(2p-1)^{n-1} - 1}{2}$$

$\{a_n\}$ は

$$-1 < 2p-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 < p \leq 1$$

のとき $0 \leq a_n \leq 1$ の範囲値

$$0 < p < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1}{2}$$

$$p = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\text{II} \text{ d) } \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}y_n \dots \textcircled{1} \\ y_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①+②より

$$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$$

$\{x_n + y_n\}$ は初項 $x_1 + y_1 = 2$ の定数列より

$$x_n + y_n = 2 \dots \textcircled{3}$$

よって $p_n (n=1, 2, \dots)$ は $0 \leq p_n \leq 1$ の範囲値

③, ①, ②より

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}(2-x_n)$$

$$= -\frac{11}{20}x_n + \frac{3}{2}$$

$$x_{n+1} - \frac{32}{31} = -\frac{11}{20}(x_n - \frac{32}{31})$$

$$\{x_n - \frac{32}{31}\}$$
 は初項 $x_1 - \frac{32}{31}$

公比 $-\frac{11}{20}$ の等比数列より

$$x_n - \frac{32}{31} = (x_1 - \frac{32}{31}) \cdot (-\frac{11}{20})^{n-1}$$

$$\therefore x_n = \frac{32}{31} + (x_1 - \frac{32}{31}) \cdot (-\frac{11}{20})^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{32}{31}$$

$$\text{よって } p_1, p_2, \dots \text{ は } (\frac{32}{31}, \frac{30}{31}) \text{ に近づく}$$

④

$$\text{d) } k + l\sqrt{2} = k' + l'\sqrt{2}$$

$$(k-k') + (l-l')\sqrt{2} = 0$$

$$(l-l')\sqrt{2} = -(k-k')$$

$$l \neq l' \text{ のとき } \sqrt{2} = -\frac{k-k'}{l-l'}$$

$$\sqrt{2} = -\frac{k-k'}{l-l'} \text{ (有理数)}$$

と矛盾する

$$\text{よって } l = l'$$

$$\therefore \text{このとき } k = k'$$

$$\text{よって } k = k', l = l'$$

$$\text{③ } a_{n+1} + b_{n+1} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$$

$$= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n$$

$$= (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$$

$$= (a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2})$$

d) より

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\text{③ } a_1 = 1, b_1 = 1$$

$$\text{d) } a_n = 1 \text{ のとき}$$

$$a_1 = 1, b_1 = 1 \text{ より } a_1 = 1$$

$$\text{d) } a_n = k (k=1, 2, \dots) \text{ のとき } a_{n+1} = k \text{ と仮定して}$$

$$(1-\sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$$

$$a_{k+1} = k+1 \text{ のとき } a_{k+1} = k+1 \text{ と仮定して}$$

$$(1-\sqrt{2})^{k+1} = (1-\sqrt{2})(a_k - b_k\sqrt{2})$$

$$= (a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2})$$

$$= a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$$

$$\text{よって } a_{k+1} = k+1$$

①. ①から数学的帰納法で示す

是れを証明する

$$a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = (1 + \sqrt{2})^n$$

$$a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = (1 - \sqrt{2})^n \text{ であり}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}}{2 \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \{ 1 - (\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}})^n \}}{2 \{ 1 + (\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}})^n \}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

⑤

$$d) a_0 = \frac{3a_1 - 4}{a_1 - 1} = \frac{3 \cdot 3 - 4}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = \frac{3a_2 - 4}{a_2 - 1} = \frac{\frac{7}{2} - 4}{\frac{7}{2} - 1} = \frac{7}{3}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 - 4}{a_3 - 1} = \frac{3 \cdot \frac{7}{3} - 4}{\frac{7}{3} - 1} = \frac{9}{4}$$

$$a_n = \frac{2n+1}{n} \text{ と推定でき}$$

①. $a_n = 1$ とする

$$a_1 = 3 \text{ であり成り立つ}$$

②. $a_n = k$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき成り立つと仮定して

$$a_k = \frac{2k+1}{k}$$

$$a_{k+1} = \frac{2(k+1)+1}{k+1} \text{ であり成り立つことを示す}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{3a_k - 4}{a_k - 1} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{2k+1}{k} - 4}{\frac{2k+1}{k} - 1} \\ &= \frac{3(2k+1) - 4k}{k+1} = \frac{2k+3}{k+1} \end{aligned}$$

よって成り立つ

③. ①から数学的帰納法で示す

$$a_n = \frac{2n+1}{n} \quad (n \geq 1)$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2$$

⑥

$$d) a_2 = \frac{9}{b-a_1} = \frac{9}{b}$$

$$a_3 = \frac{9}{b-a_2} = \frac{9}{b - \frac{9}{b}} = \frac{15}{7}$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d \text{ とすると } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = d \text{ であり}$$

$$d = \frac{9}{b-d}$$

$$d(b-d) = 9$$

$$d^2 - bd + 9 = 0$$

$$(d-9)^2 = 0 \quad \therefore d = 9$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \frac{1}{a_{n+1}-3} &= \frac{1}{\frac{9}{b-a_n}-3} \\ &= \frac{b-a_n}{9-3(b-a_n)} \\ &= \frac{-(a_n-3)+3}{3(a_n-3)} \\ &= \frac{1}{a_n-3} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}-3} \text{ とおくと } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{公差} = -\frac{1}{3} \text{ であり成り立つ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}-3} = -\frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) \cdot n = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3} \text{ であり}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3} = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n-3}} + 3$$

$$= -\frac{6}{2n+1} + 3$$

$$= \frac{-6+3(2n+1)}{2n+1}$$

$$= \frac{6n-3}{2n+1}$$

7

$$d) \sqrt{2ax+1} = x$$

$$2ax+1 = x^2, x \geq 0$$

$$x^2 - 2ax - 1 = 0, x \geq 0$$

$$\therefore x = 1 + \sqrt{2} = d$$

$$d) n = 1 \text{ のとき}$$

$$a_1 = 3 > 1 + \sqrt{2} \text{ より } x_1 \notin \mathbb{Z}$$

$n, m = k (k=1, 2, \dots)$ のとき $x_k \notin \mathbb{Z}$ と仮定して

$$0 < d$$

$$m = k+1 \text{ のとき } x_{k+1} \notin \mathbb{Z} \text{ と仮定する}$$

$$0 < a_{k+1} - d = \sqrt{2ax_{k+1} + 1} - d$$

$$> \sqrt{2ax_{k+1} + 1} - d$$

$$= \frac{2ax_{k+1} + 1 - d^2}{\sqrt{2ax_{k+1} + 1} + d} = 0 \quad (d^2 - 2d - 1 = 0)$$

$$\therefore a_{k+1} > d$$

$$\therefore x_{k+1} \notin \mathbb{Z}$$

以上より、 n から k までの x_k は整数でない

よって $x_k \notin \mathbb{Z}$ である。

$$e) a_{n+1} - d = \sqrt{2ax_{n+1} + 1} - d$$

$$= \frac{(2ax_{n+1} + 1) - d^2}{\sqrt{2ax_{n+1} + 1} + d}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2ax_{n+1} + 1} + d} \left(a_n - \frac{d^2 - 1}{2} \right)$$

$$d^2 - 2d - 1 = 0 \text{ より } d^2 - 1 = 2d \text{ より}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2ax_{n+1} + 1} + d} (a_n - d)$$

$$a_n > d \text{ より}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2ax_{n+1} + 1} + d} < \frac{2}{\sqrt{2ax_{n+1} + 1} + d} < \frac{1}{d} < \frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$a_{n+1} - d < \frac{1}{2} (a_n - d)$$

3) $1 + \sqrt{2} < a_1 < 2$ のとき

$$a_n - d < \frac{1}{2} (a_{n-1} - d) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - d)$$

$\therefore$

$$0 < a_n - d < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - d) = 0 \text{ であるから}$$

以上より $a_n \rightarrow d$ となる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - d) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d$$

8

$$d) f(x) = x^2 = a$$

$$f'(x) = 2x$$

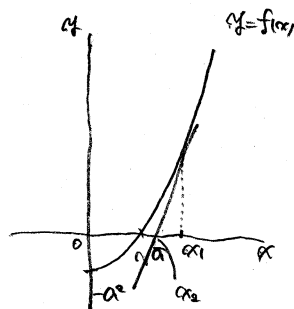
$$y = f(x) \text{ の } (x_n, f(x_n)) \text{ は } f \text{ と } g$$

の接点である。

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

$$y = 2x_n(x - x_n) + (x_n^2 - a)$$

$$\therefore y = 2x_n x - x_n^2 - a$$



$\therefore$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} \quad (x_n > 0)$$

以上より $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ となる。

$$e) \sqrt{a} < x_{n+1}$$

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0 \quad (x_n > \sqrt{a})$$

$$x_{n+1} < x_n$$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n} > 0$$

8)

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| = \left| \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} \right| |x_n - \sqrt{a}|$$

$$\frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}$$

$$x_n > \sqrt{a} \text{ であるから } \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$0 < \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{a}|$$

4) + 1/2 3 un に 2 して

$$|a_n - \sqrt{a}| < \frac{1}{2} |a_{n-1} - \sqrt{a}| < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \sqrt{a}|$$

よって

$$0 < |a_n - \sqrt{a}| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \sqrt{a}|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - \sqrt{a}| = 0 \text{ であるから}$$

(1) 証明の要領は以下の通り

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \sqrt{a}| = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}$$

<point>

$$1. = 2 - 1 \text{ なる}$$