

高3数学 標準問題演習 演習 12. 場合の数

1 [I . 2003 法政大 II . 2017 愛媛大]

- I. (1) 162 を素因数分解せよ.
- (2) 集合 A を $A = \{1, 2, 3, \dots, 162\}$ とおくとき, 3 の倍数となる A の要素の個数, 2 の倍数となる A の要素の個数, 2 でも 3 でも割り切れる A の要素の個数をそれぞれ求めよ.
- (3) 分母が 162 で, 分子が A の要素である分数 $\frac{1}{162}, \frac{2}{162}, \frac{3}{162}, \dots, \frac{162}{162}$ の中の既約分数の個数を求めよ.

II. 2 つの集合 $A = \{x \mid x \text{ は整数}, 1 \leq x \leq 1000\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 30 \text{ と互いに素な自然数}\}$ の共通部分 $A \cap B$ の要素の個数を求めよ.

2 [2022 同志社大]

7 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 を重複なく使って 4 桁の整数をつくる. 千の位の数と百の位の数の和が 3 となる整数は ア 通りある. 隣り合う位の数の和が 3 とならない整数は イ 通りある. また, 4 の倍数となる整数は ウ 通りある.

3 [I . 2013 北里大 II . 2015 早稲田大]

- I. 6 人の生徒 A, B, C, D, E, F が横 1 列に並ぶ.
- (1) A と B が隣り合う並び方は 通りある.
- (2) B と C が隣り合わない並び方は 通りある.
- (3) A と B が隣り合い, かつ, B と C が隣り合わない並び方は 通りある.
- II. A, B, C, D, E の 5 人の紳士から, それぞれの帽子を 1 つずつ受けとり, それらを再び 1 人に 1 つずつ配る. 帽子は必ずしも元の持ち主に戻されるわけではない.
- (1) 帽子を配る方法は全部で ア 通りある. そのうち, A が自分の帽子を受けとるのは イ 通り, B が自分の帽子を受けとるのは同じく イ 通り, A と B がともに自分の帽子を受けとるのは ウ 通りである. したがって, A が自分の帽子を受けとらず, かつ B も自分の帽子を受けとらない場合は エ 通りである.
- (2) A, B, C の 3 人が誰も自分の帽子を受けとらない場合は何通りか.

高3数学 標準問題演習 演習 12. 場合の数

4 [I. 2006 上智大 II. 早稲田大]

I. 赤玉 2 個, 青玉 2 個, 白玉 3 個の合わせて 7 個の玉を横 1 列に並べる。ただし, 同じ色の玉は区別しないものとする。

- (1) 赤玉どうしが隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (2) 赤玉どうしが隣り合い, 青玉どうしも隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (3) 赤玉どうしが隣り合い, 青玉どうしが隣り合い, 更に 2 個以上の白玉どうしも隣り合う並べ方は何通りあるか。
- (4) 白玉どうしが隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (5) 赤玉どうしが隣り合い, 白玉どうしが隣り合わない並べ方は何通りあるか。
- (6) 同じ色の玉が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

II. COMMERCE という語を構成する 8 個の文字を円形に並べるとき,

- (1) 並べ方は全部で何通りあるか。
- (2) 同じ文字が隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

5 [I. 信州大 II. 大阪女子大]

I. 白玉 1 個, 赤玉 2 個, 青玉 4 個, 黄玉 6 個がある。これを糸でつないで, すきまのないネックレスをつくる。ネックレスの種類の総数を求めよ。ただし, 回転または裏返すことにより一致するものは, 同種類とみなす。

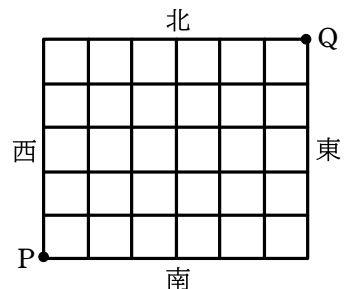
II. a, a, b, b, c, c, c, c の 8 個の文字がある。このとき

- (1) 8 個の文字全部を左から 1 列に並べる方法は何通りあるか。
- (2) 8 個の文字から 3 個の文字を選ぶ方法は何通りあるか。
- (3) 8 個の文字全部を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。

6 [2007 岩手大]

ある町には, 図のように東西に 6 本の道と南北に 7 本の道がある。

- (1) P 地点から Q 地点まで行く最短経路は何通りあるか。
- (2) P 地点から Q 地点まで行く最短経路のうち, 右折の回数と左折の回数の合計がちょうど 8 となるのは何通りあるか。



高3数学 標準問題演習 演習 12. 場合の数

7 [I. 1997 会津大 II. 2012 首都大学東京]

I. n を自然数とする. 正 $6n$ 角形の異なる 3 頂点を結んで三角形を作る.

- (1) 正三角形は 個できる.
- (2) 直角三角形は 個できる.
- (3) 二等辺三角形は 個できる.
- (4) 鈍角三角形は 個できる.

II. P は正 n 角形 ($n \geq 6$) とする.

- (1) P の異なる 2 本の対角線の組で, P の頂点を共有するものは何通りあるか.
- (2) P の異なる 2 本の対角線の組で, P の頂点以外の点を共有するものは何通りあるか.
- (3) P の異なる 2 本の対角線の組で, 共有点をもたないものは何通りあるか.

8 [一橋大]

正の整数 n に対して, $n = k + 2l$ を満たすような 0 以上の整数の組 (k, l) の個数を a_n とする. また, $n = p + 2q + 3r$ を満たすような 0 以上の整数の組 (p, q, r) の個数を b_n とする.

- (1) a_n を n で表せ.
- (2) n が 6 の倍数のとき, b_n を n で表せ.

9 [2010 早稲田大]

8 名のクラスのうち, 3 名が男子学生, 5 名が女子学生とする. グループ研究を課すことになり, クラスを 3 つのグループに分けるとする. ただし, それぞれのグループの人数は 2 人以上, 4 人以下とする.

- (1) 学生の性別に関係なくグループ分けをする方法は ^ア 通りある.
- (2) 男子学生のみ, あるいは女子学生のみで構成されるグループを含まないグループ分けの方法は ^イ 通りある.

高3数学 標準問題演習 演習 12. 場合の数

10 [1999 立教大]

6 人の人を 3 つの部屋に分けたい. どの部屋にも少なくとも 1 人は入るものとして, 分ける方法は何通りあるか. 次の (1)~(3) のそれぞれの場合について答えよ.

- (1) 人も部屋も区別しないで, 人数の分け方だけ考えた場合.
- (2) 人は区別しないが, 部屋は区別して考えた場合.
- (3) 人も部屋も区別して考えた場合.

11 [I. 2016 名城大 II. 2004 東北学院大]

I. n を自然数とし, 整式 $(2x+1)^n$ を展開した式を $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ とする。

- (1) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を n を用いて表せ.
- (2) $\frac{a_k}{a_{k-1}}$ ($1 \leq k \leq n$) を n と k を用いて表せ.
- (3) $a_k = a_{k-1}$ ($1 \leq k \leq n$) を満たす k が存在するための n の条件を求めよ.
- (4) $n=101$ のとき, a_k が $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ の中で最大となる k をすべて求めよ.

II. $(x-2)^{50}$ の展開式における x^k の係数を a_k とするとき, a_k を最大にする k と a_k を最小にする k の値を, それぞれ求めよ.

12 [2011 上智大]

$(100.1)^7$ の百の位の数字を求めよ. また, 小数第 4 位の数字を求めよ.

13 [2010 早稲田大]

n を 2 以上の整数として,

$$A_n = 2 \cdot {}_nC_2 + 3 \cdot 2 \cdot {}_nC_3 + 4 \cdot 3 \cdot {}_nC_4 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot {}_nC_n$$

$$B_n = {}_nC_0 - \frac{{}_nC_1}{2} + \frac{{}_nC_2}{3} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{{}_nC_n}{n+1}$$

とする. このとき, $A_n \cdot B_{n-1} = \left(n + \sqrt[n]{\quad} \right) \cdot \sqrt[n]{\quad}^{n+1} \sqrt[n]{\quad}$ となる.

14 [2019 首都大学東京]

p を素数とする。次の問いに答えよ。

- (1) r を p より小さい自然数とする。このとき、 p は r の階乗 $r!$ の素因数ではないことを示せ。
- (2) r を p より小さい自然数とする。このとき、 ${}_pC_r \cdot r! = p(p-1)\cdots(p-r+1)$ であることを利用して、 ${}_pC_r$ が p の倍数であることを示せ。
- (3) n が自然数のとき、 $n^p - n$ が p の倍数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。