1 [東京学芸大]

(1) a を定数とするとき，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における関数
$f(x)=(-8a+4)x+(3a^2+2a+1)$
の最小値を a を用いて表せ.
(2) a がいろいろな実数値をとるとき，(1) で求めた値の最小値を求めよ.

(1) $f(x)=(-8a+4)x+(3a^2+2a+1)$ (1次式)

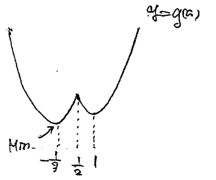
(i) $-8a+4 \geqq 0$ すなわち $a \leqq \frac{1}{2}$ のとき
$f(x)$ は単調増加であるから
最小値 $f(0)=3a^2+2a+1$

(ii) $-8a+4<0$ すなわち $a>\frac{1}{2}$ のとき
$f(x)$ は単調減少であるから
最小値 $f(1)=3a^2-6a+5$

(2) $g(a)=\begin{cases} 3a^2+2a+1 & (a \leqq \frac{1}{2}) \\ 3a^2-6a+5 & (a>\frac{1}{2}) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3(a+\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3} & (a \leqq \frac{1}{2}) \\ 3(a-1)^2+2 & (a>\frac{1}{2}) \end{cases}$

$a=-\frac{1}{3}$ で 最小　最小値 $\frac{2}{3}$ //



2 [2016 センター]

a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。

$f(x)=(-\boxed{ア}a+\boxed{イ})x+2a+1$ である。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$a \leqq \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}$ のとき，$\boxed{ウ}a+\boxed{エ}$ であり,

$a > \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}$ のとき，$\boxed{オ}a+\boxed{カ}$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，常に $f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は,

$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおき，a の関数と考える。

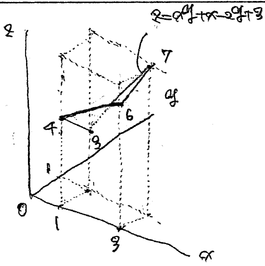
a が $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ の範囲にあるとき，$g(a)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ であり,

$g(a)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である。

3

(1) $x,\ y$ が $1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で変化するときの $xy+x-2y+3$ の最大値と最小値を求めよ.
(2) 関数 $f(x,\ y)=3y^2-4xy+3x-2y+1$ の $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における最小値を求めよ.

(1)



$z=xy+x-2y+3$
$y=0$ のとき $z=x+3$
$y=1$ 〃 $z=2x+1$

$f(x,y)=xy+x-2y+3$ とおく
$y=k$ のとき $(0 \leqq k \leqq 1)$
$f(x,k)=kx+x-2k+3$
$=(k+1)x-2k+3$
$k+1>0$ より $f(x,k)$ は単調増加
最大値 $f(3,k)=k+6$，最小値 $f(1,k)=-k+4$
k を動かして
最大値 $f(3,1)=7$　最小値 $f(1,1)=3$ // ← 最大の最大が最大
小 小 小

(2) $f(x,y)=3y^2-4xy+3x-2y+1$
$y=k$ のとき $(0 \leqq k \leqq 1)$
$f(x,k)=3k^2-4kx+3x-2k+1$
$=(3-4k)x+3k^2-2k+1$

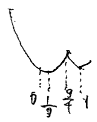
(i) $0 \leqq k \leqq \frac{3}{4}$ のとき
$3-4k \geqq 0$ より $f(x,k)$ は単調増加
最小値 $f(0,k)=3k^2-2k+1$

(ii) $\frac{3}{4}<k \leqq 1$ のとき
$3-4k<0$ より $f(x,k)$ は単調減少
最小値 $f(1,k)=3k^2-6k+4$

k を $0 \leqq k \leqq 1$ で動かして

$g(k)=\begin{cases} 3k^2-2k+1 & (0 \leqq k \leqq \frac{3}{4}) \\ 3k^2-6k+4 & (\frac{3}{4}<k \leqq 1) \end{cases}$ として

$=\begin{cases} 3(k-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3} & (0 \leqq k \leqq \frac{3}{4}) \\ 3(k-1)^2+1 & (\frac{3}{4}<k \leqq 1) \end{cases}$



最小値 $f(1,\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$ //

4

実数 $x,\ y$ が $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすとき，$f(x,\ y)=x^2y+2x+xy+3y-1$ の最小値を求めよ.

5 [東京大]

xy 平面内の領域 $-1 \leqq x \leqq 1,\ -1 \leqq y \leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 (a, b) の範囲を図示せよ．

$f(x, y)=1-ax-by-axy$ とおく

$y=k\ (-1 \leqq k \leqq 1)$ のとき

$f(x, k)=1-ax-bk-akx$

$\quad =-a(1+k)x+1-bk$

は高々1次式であるから最小値は $f(-1, k)$ または $f(1, k)$

k を動かして

$f(-1, k)=(a-b)k+a+1$

も高々1次式であるから最小値は $f(-1,-1)$ または $f(-1,1)$

同様に $f(1, k)$ について最小値は $f(1,-1)$ または $f(1,1)$

よって $f(x, y)$ の最小値は

$f(-1,-1),\ f(-1,1),\ f(1,-1),\ f(1,1)$

のいずれかである

$f(x, y)$ の最小値が正となるとき

これらがすべて正になればよいから

$f(-1,-1)=1+a+b-a>0 \quad \therefore b>-1$

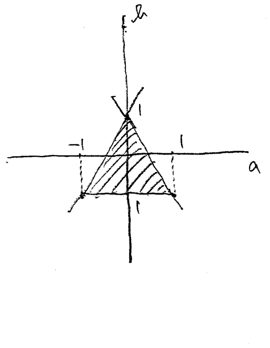
$f(-1,1)=1+a-b+a>0 \quad \therefore b<2a+1$

$f(1,-1)=1-a+b+a>0 \quad \therefore b>-1$

$f(1,1)=1-a-b-a>0 \quad \therefore b<-2a+1$

$$\therefore \begin{cases} b>-1 \\ b<2a+1 \\ b<-2a+1 \end{cases}$$

求める (a, b) の存在範囲は図の斜線部



ただし境界は除く

6 [Ⅰ. 1998 北星学園大　Ⅱ. 長崎総合科学大]

Ⅰ. (1)　x, y の関数 $f(x, y)=x^2-4xy+5y^2+2y+2$ の最小値を求めよ．また，このときの x, y の値を求めよ．

(2)　x, y の範囲を $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ に制限したときの $f(x, y)$ の最小値を求めよ．また，このときの x, y の値を求めよ．

Ⅱ. $P=2x^2+2xy+5y^2-6x-6y+5$ とする．

(1) x, y がすべての実数値をとり得るとき，P の最小値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 3$ の範囲で，P の最大値と最小値を求めよ．

Ⅰ. (1) $f(x, y)=x^2-4xy+5y^2+2y+2$

$\quad =(x-2y)^2+y^2+2y+2$

$\quad =(x-2y)^2+(y+1)^2+1$

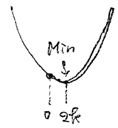
$y=-1,\ x=-2$ のとき最小で　最小値 1 //

(2) $y=k\ (k \geqq 0)$ のとき

$f(x, k)=x^2-4kx+5k^2+2k+2$

$\quad =(x-2k)^2+k^2+2k+2$

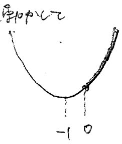
グラフは下に凸, 軸 $x=2k\ (\geqq 0)$



$x=2k$ のとき最小　最小値 $f(2k, k)=k^2+2k+2$

$\quad =(k+1)^2+1$

k を動かして



$k=0$ のとき最小

最小値 2 $(x=0,\ y=0)$ //

7 [Ⅰ. 産業医科大　Ⅱ. 順天堂大　Ⅲ. 名古屋市立大]

Ⅰ. x, y の関数 $f(x, y)=3x^2-6xy+7y^2+12x-14y+12$ がある．$x \geqq 0, y \geqq 0$ のとき，$f(x, y)$ の最小値を求めよ．

Ⅱ. 連立不等式 $-2 \leqq x \leqq 2,\ -2 \leqq y \leqq 2$ の表す領域を D とする．

(1) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$2x^2+y^2+3x-2y+1$ のとる値の最大値，最小値を求めよ．

(2) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$x^2-4xy+4y^2+2x+y+1$ のとる値の最大値，最小値を求めよ．

Ⅲ. $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1$ のとき，x, y の関数 $f(x, y)=yx^2+2yx-6y^2x+3y^2$ の最大値を求めよ．

8 [2008 東京理科大]

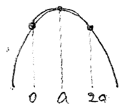
(1) 正の定数 a に対して，式 $z=-ay^2+2a^2y-2a^3+a$ を考える。y が範囲 $0 \leqq y \leqq 2a$ を動くとき，z のとりうる値の範囲を，a を用いて表せ。

(2) 式 $z=-xy^2+2x^2y-2x^3+x$ を考える。x，y が条件 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 2x$ を満たしながら動くとき，z の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

(1) $z=-ay^2+2a^2y-2a^3+a=f(y)$ とおく

$=-a(y-a)^2-a^3+a$

グラフは上に凸，軸は $y=a$



zのとりうる値の範囲は

$f(0) \leqq z \leqq f(a)$

$\therefore -2a^3+a \leqq z \leqq -a^3+a$ //

(2) $z=-xy^2+2x^2y-2x^3+x$

$x=a\ (0 \leqq a \leqq 1)$ のとき

$z=-ay^2+2a^2y-2a^3+a$

(1)より

$-2a^3+a \leqq z \leqq -a^3+a$

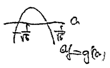
aを動かして

$g(a)=-2a^3+a\ (0 \leqq a \leqq 1)$ とおく

$g'(a)=-6a^2+1$

$g'(a)=0$ となるとき $a=\frac{1}{\sqrt{6}}$

a	0		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		1
$g'(a)$		+	0	−	
$g(a)$		↗	極大	↘	



$g(0)=0,\ g(1)=-1$ より 最小値は -1

$h(a)=-a^3+a\ (0 \leqq a \leqq 1)$ とおく

$h'(a)=-3a^2+1$

$h'(a)=0$ となるとき $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$

a	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$h'(a)$		+	0	−	
$h(a)$		↗	極大	↘	

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大かつ最大　最大値は $h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

以上より

最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ $\left(x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

最小値　-1 $(x=1,\ y=0)$ //
$(x=1,\ y=2)$

9 [甲南大]

$P=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ とおく．

(1) 任意の実数 a, b, c に対して $P \geqq 0$ となることを示せ．

(2) $0 \leqq a \leqq 1, 1 \leqq b \leqq 2, 2 \leqq c \leqq 3$ のとき P の最小値を求めよ．また，そのときの a, b, c の値を求めよ．

(1) $P=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$ は

(2) $P=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

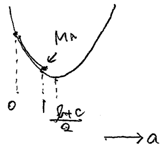
$=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2+c^2-bc$

$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{2}bc$

軸は $a=\frac{b+c}{2}$

$\frac{3}{2} \leqq \frac{b+c}{2} \leqq \frac{5}{2}$



$a=1$ のとき最小

このとき

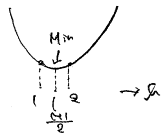
$P=b^2+c^2-b-bc-c+1$

$=b^2-(c+1)b+c^2-c+1$

$=\left(b-\frac{c+1}{2}\right)^2-\frac{(c+1)^2}{4}+c^2-c+1$

$=\left(b-\frac{c+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{2}c+\frac{3}{4}$

軸は $b=\frac{c+1}{2}$　　$\frac{3}{2} \leqq \frac{c+1}{2} \leqq 2$

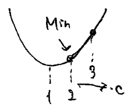


$b=\frac{c+1}{2}$ のとき最小

このとき

$P=\frac{3}{4}c^2-\frac{3}{2}c+\frac{3}{4}$

$=\frac{3}{4}(c-1)^2$



$c=2$ のとき最小

最小値は $\frac{3}{4}$ //

$\boxed{10}$ [2003 東北学院大]

(1) $x-2y=t$ とおくとき，$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3$ を t で表せ.

(2) x，y が不等式 $x^2\leqq 16$，$2y^2+3y+1\leqq 0$ を満たすとき，$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3$ の最大値と最小値を求めよ.

(1) $Q=x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3$ とおく

$=(x-2y)^2+2(x-2y)+3$

$=t^2+2t+3$ //

(2) $x^2\leqq 16$ より

$x^2-16\leqq 0$

$(x+4)(x-4)\leqq 0$　∴ $-4\leqq x\leqq 4$

$2y^2+3y+1\leqq 0$ より　$-2\times$

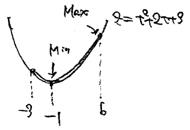
$(y+1)(2y+1)\leqq 0$　∴ $-1\leqq y\leqq -\frac{1}{2}$

このとき

$-4\leqq x\leqq 4$，$1\leqq -2y\leqq 2$

∴ $-3\leqq x-2y\leqq 6$

∴ $-3\leqq t\leqq 6$



$Q=t^2+2t+3$

$=(t+1)^2+2$

$t=6$ のとき 最大

最大値 51

$t=-1$ 〃 小

〃 2 //

$\boxed{11}$ [神奈川大]

平面上の集合 M と x, y の 2 次式 F が

$M=\{(x,y)\mid x+2y\leqq 7, x\geqq 0, y\geqq 0\}$，

$F=4xy-6x+4y^2+x^2+4-12y$

で与えられるとき，

(1) $x+2y=t$ とおき，F を t で表せ.

(2) 点 (x,y) が集合 M 上を動くとき，F の最大値と最小値を求めよ.

[5]

$f(x,y)=1-ax-by-axy$

$y=k$ のとき $(-1\leqq k\leqq 1)$

$f(x,k)=1-ax-bk-akx$

$=-a(k+1)x-bk+1$

$-1\leqq k\leqq 1$ より $k+1\geqq 0$

i) $a\geqq 0$ のとき

$-a(k+1)\leqq 0$ より $f(x,k)$ は単調減少

最小値 $f(1,k)=-(a+b)k-a+1$

ア) $a+b\geqq 0$ のとき $(b\geqq -a)$

$f(1,k)$ は単調減少

最小値 $f(1,1)=-2a-b+1>0$

$\therefore b<-2a+1$

イ) $a+b<0$ のとき $(b<-a)$

$f(1,k)$ は単調増加

最小値 $f(1,-1)=b+1>0$

$\therefore b>-1$

ii) $a<0$ のとき

$-a(k+1)\geqq 0$ より $f(x,k)$ は単調増加

最小値 $f(-1,k)=(a-b)k+a+1$

ア) $a-b\geqq 0$ のとき $(b\leqq a)$

$f(-1,k)$ は単調増加

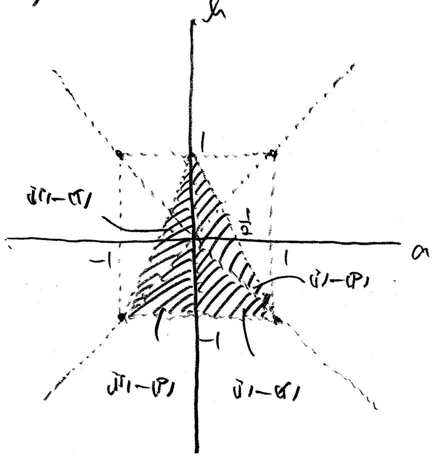
最小値 $f(-1,-1)=b+1>0$ $\therefore b>-1$

イ) $a-b<0$ のとき $(b>a)$

$f(-1,k)$ は単調減少

最小値 $f(-1,1)=2a-b+1>0$ $\therefore b<2a+1$

以上より



6 II.

(1) $P=2x^2+2xy+5y^2-6x-6y+5$

$=2x^2-2(3-y)x+5y^2-6y+5$

$=2\left\{x-\frac{3-y}{2}\right\}^2-\frac{(3-y)^2}{2}+5y^2-6y+5$

$=2\left\{x-\frac{3-y}{2}\right\}^2+\frac{9}{2}y^2-3y+\frac{1}{2}$

$=2\left\{x-\frac{3-y}{2}\right\}^2+\frac{9}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2$

$x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ のとき最小で

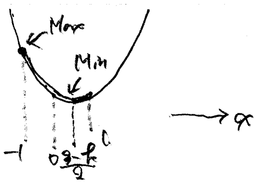
最小値 0 //

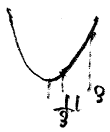
(2) $y=k$ のとき $(1\leqq k\leqq 3)$

$P=2x^2+2kx+5k^2-6x-6k+5$

$=2\left(x-\frac{3-k}{2}\right)^2+\frac{9}{2}k^2-3k+\frac{1}{2}$

グラフは下に凸、軸は $x=\frac{3-k}{2}$ $\left(0\leqq\frac{3-k}{2}\leqq 1\right)$





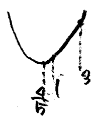
$x=\frac{2-k}{3}$ で最小

最小値 $\frac{9}{2}k^2-3k+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\left(k-\frac{1}{3}\right)^2$

$x=-1$ で最大

最大値 $5k^2-8k+13=5\left(k-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$

kを動かして



最大値 34.

最小値 2 //