

2.2 2 次関数

(1) 関数

2 つの変数 x, y があって、 x の値を定めると、それに対応して、 y の値がただ 1 つ定まるとき、 y は x の関数であるという。

y が x の関数であることを、文字 f などを用いて $y=f(x)$ と表す。

また、この関数を、単に関数 $f(x)$ ともいう。

関数 $y=f(x)$ において、 x の値 a に対応して定まる y の値を $f(a)$ と書き、 $f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x=a$ における値という。

例えば、 $f(x)=5x+2$ のとき、

$$f(0)=5\cdot 0+2=2, f(2)=5\cdot 2+2=12, f(-1)=5\cdot (-1)+2=-3,$$

$$f(a+1)=5(a+1)+2=5a+7$$

となる。

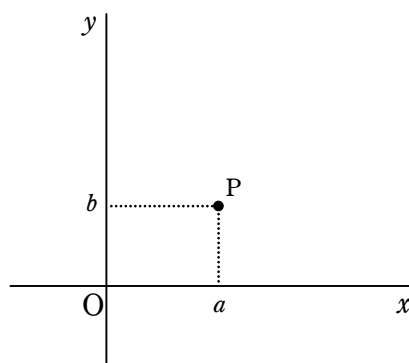
関数 $y=f(x)$ において、変数 x のとりうる値の範囲を、この関数の定義域という。また、 x が定義域全体を動くとき、 y がとる値の範囲を、この関数の値域という。

(2) 関数のグラフ

平面上に座標軸を定めると、その平面上的点 P の位置は、右の図のような 2 つの実数の組 (a, b) で表される。逆に 2 つの実数の組 (a, b) を定めれば、平面上的点は 1 つに定まる。この組 (a, b) を点 P の座標といい、座標が (a, b) である点 P を、 $P(a, b)$ と書く。座標軸の定められた平面を座標平面という。

座標軸で分けられた座標平面の 4 つの部分、それぞれ、図のように第 1 象限、第 2 象限、第 3 象限、第 4 象限という。ただし、座標軸上の点は、どの象限にも属さないとする。

なお、図の $(+, +)$ などは、各象限に属する点の x 座標、 y 座標の符号を示す。



第 2 象限 (-, +)	第 1 象限 (+, +)
第 3 象限 (-, -)	第 4 象限 (+, -)

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，関係 $y=f(x)$ を満たすような点 (x, y) ，すなわち，点 $(x, f(x))$ 全体の集合で作られる図形を，この関数のグラフという。

(3) 2次関数のグラフ

x の2次式で表される関数を， x の2次関数という。 x の2次関数 y は， a, b, c を定数として，一般に次の形に書き表される。

$$y=ax^2+bx+c, \text{ ただし, } a \neq 0$$

ここでは，まず2次関数 $y=ax^2$ のグラフを調べ，それをもとに，ほかの2次関数のグラフについて学ぼう。

① $y=ax^2$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2$ は，2乗に比例する関数として，すでに学んでいる。一般に，2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点 O を通り， y 軸に関して対称な曲線である。

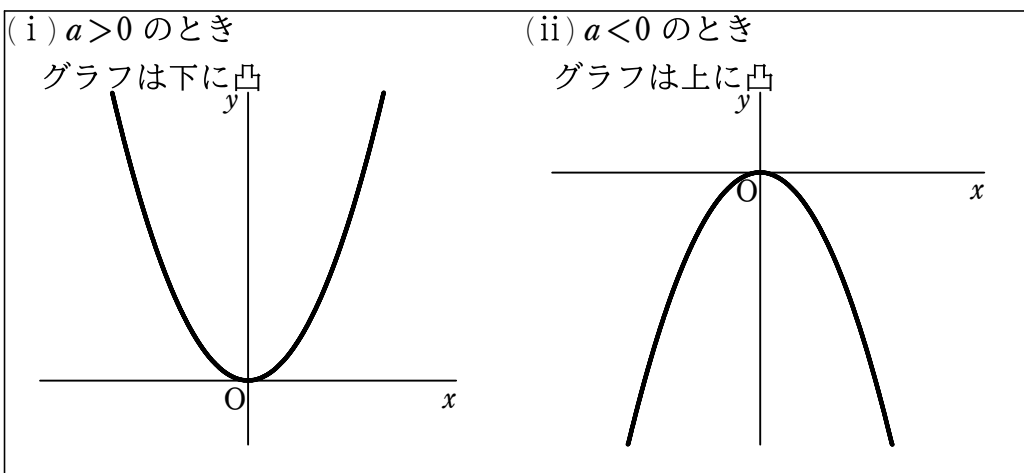
2次関数 $y=ax^2$ のグラフの形の曲線を放物線という。

放物線は対称の軸をもっている。この対称の軸を，その放物線の軸といい，軸と放物線の交点を，その放物線の頂点という。

2次関数 $y=ax^2$ のグラフは，軸が y 軸で，頂点が原点の放物線である。

$a > 0$ のとき， $x \leq 0$ では y は減少し， $x \geq 0$ では y は増加，

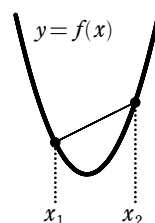
$a < 0$ のとき， $x \leq 0$ では y は増加し， $x \geq 0$ では y は減少する。



また、2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは、その曲線の形状から
 $a>0$ のとき、下に凸 $a<0$ のとき、上に凸
 であるという。

補足

関数 $y=f(x)$ がある区間に対して、その区間
 に含まれる任意の区間 $x_1 \leq x \leq x_2$ において、
 $y=f(x)$ が 2 点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分
 より下側にあるとき、 $y=f(x)$ はその区間で
 下に凸であるという。



同様に、関数 $y=f(x)$ がある区間に対して、
 その区間に含まれる任意の区間 $x_1 \leq x \leq x_2$ において、 $y=f(x)$ が 2 点
 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分より上側にあるとき、 $y=f(x)$ はその区
 間で上に凸であるという。

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフについてまとめると、次のようになる。

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフ

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは、放物線である。

1. 軸は y 軸 頂点は原点

2. $a>0$ のとき下に凸、 $a<0$ のとき上に凸

② $y=ax^2+q$ のグラフ

$y=2x^2+3$ について考える。

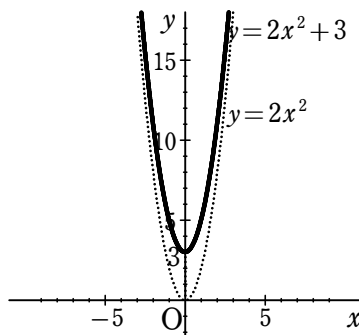
x の各値における $2x^2+3$ の値は、次の表のようになる。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$2x^2$	...	18	8	2	0	2	8	18	...
$2x^2+3$	...	21	11	5	3	5	11	21	...

$2x^2+3$ の値は、 $2x^2$ を計算してから $+3$ する

ので、 $y=2x^2+3$ のグラフは $y=2x^2$ の
 グラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動したもの
 になる。一般に、次のことが成り立つ。

注 平面上で、図形上の各点を一定の向きに、一定の距離だけ動かすこ
 とを平行移動という。



2 次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフ

2 次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

また、その軸は y 軸 ($x=0$)、頂点は点 $(0, q)$ である。

③ $y = a(x-p)^2$ のグラフ

$y = 2(x-1)^2$ について考える。

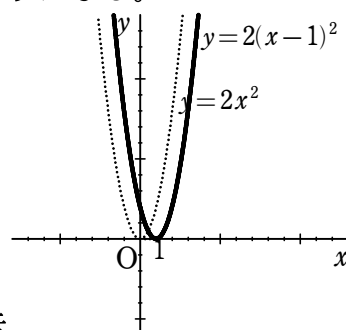
x の各値における $2(x-1)^2$ の値は、次の表のようになる。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$2x^2$	...	18	8	2	0	2	8	18	...
$x-1$	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$2(x-1)^2$	...	32	18	8	2	0	2	8	...

x が増加する方向に時の流れがあるとする、 $x-1$ は、 x より 1 だけ過去の値をとる。

よって、 $2(x-1)^2$ の値は、 $2x^2$ より 1 だけ過去の値をとることになる。

つまり、 $y = 2(x-1)^2$ のグラフは、 $y = 2x^2$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したもののになる。一般に、次のことが成り立つ。



2 次関数 $y = a(x-p)^2$ のグラフ

2 次関数 $y = a(x-p)^2$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した放物線である。

また、その軸は $x=p$ 、頂点は $(p, 0)$ である。

④ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

$y = 2(x-1)^2 + 3$ について考える。

y の値を求める際に、まず $2(x-1)^2$ を計算してから $+3$ するので、 $y = 2(x-1)^2 + 3$ のグラフは、 $y = 2(x-1)^2$ のグラフを y 軸方向に 3 だけ平行移動したもののになる。 $y = 2(x-1)^2$ のグラフは、 $y = 2x^2$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したもののなので、 $y = 2(x-1)^2 + 3$ のグラフは、 $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に 3 だけ平行移動したもののになる。

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

軸は直線 $x=p$, 頂点は点 (p, q)

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ に対して、 $y=ax^2+bx+c$ の形を 2 次関数の一般形、 $y=a(x-p)^2+q$ の形を 2 次関数の標準形と呼ぶことがある。

⑤ $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=2(x-1)^2+3$ は展開して整理すれば、 $y=2x^2-4x+5$ となる。逆に、 $y=2x^2-4x+5$ のグラフを考えると、これを $y=2(x-1)^2+3$ の形に変形する。2 次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを平方完成するという。

$$y=2x^2-4x+5$$

$$=2\{x^2-2x\}+5 \quad x^2 \text{ と } x \text{ の項を } x^2 \text{ の係数でくくる}$$

$$=2\{x^2-2x+1^2-1^2\}+5 \quad \{ \} \text{ 内で } x \text{ の係数の半分の 2 乗をたしてひく}$$

$$=2\{(x-1)^2-1\}+5 \quad x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$$

$$=2(x-1)^2-2+5 \quad \text{分配法則}$$

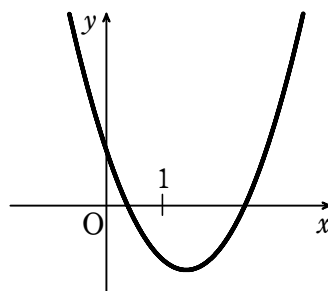
$$=2(x-1)^2+3$$

このように変形できれば、グラフは下に凸で、軸が $x=1$, 頂点が $(1, 3)$ の放物線であることが分かり、グラフをかくことができる。

一般に、2 次関数の一般形のグラフをかくとき、平方完成して標準形に直してからグラフをかく。

例1

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになっているとき、 a , b , c , および b^2-4ac , $a+b+c$ の符号をいえ。



解説

グラフが下に凸より, $a > 0$

c は $x=0$ のときの y の値より, $c > 0$

$a+b+c$ は $x=1$ のときの y の値より, $a+b+c < 0$

$y=ax^2+bx+c$ を変形すると

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\text{頂点は}\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

頂点の x 座標 > 0 より

$$-\frac{b}{2a} > 0$$

$a > 0$ より

$$b < 0$$

頂点の y 座標 < 0 より

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$$

$a > 0$ より

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \text{答}$$

(4) 平行移動・対称移動

グラフの平行移動や対称移動について考える。対称移動については、 x 軸対称, y 軸対称, 原点对称について考える。一般論については、節末の **参考** を参照。

例2

(1) 放物線 $y=2x^2-6x+7$ の頂点の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ であり, この放物線を x 軸方向に -1 , y 軸方向に $+2$ だけ平行移動してできる放物線の方程式は $y=x^2-4x+8$ である。

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -4 平行移動して得られる放物線の方程式が $y=x^2-6x+8$ であるとき, a, b の値を求めよ。

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= 2x^2 - 6x + 7 \\
 &= 2\{x^2 - 3x\} + 7 \\
 &= 2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\} + 7 \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

よって、頂点の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$y = 2x^2 - 6x + 7$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に $+2$ だけ平行移動すると、
頂点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ に移動するから、求める放物線は

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \quad \therefore y = 2x^2 - 2x + 5$$

別解 平行移動の一般論を利用。

$$(1) \quad f(x) = 2x^2 - 6x + 7$$

$y = f(x)$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に $+2$ だけ平行移動すると、

$$y - 2 = f(x + 1)$$

$$y - 2 = 2(x + 1)^2 - 6(x + 1) + 7$$

$$\therefore y = 2x^2 - 2x + 5$$

(2) $y = x^2 - 6x + 8$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 4 平行移動したものが
 $y = x^2 + ax + b$ である。

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ とおくと、 $y = x^2 + ax + b$ は

$$y - 4 = f(x + 2)$$

$$y - 4 = (x + 2)^2 - 6(x + 2) + 8$$

$$\therefore y = x^2 - 2x + 4$$

よって、 $a = -2, b = 4$

別解

$y = x^2 + ax + b$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -4 だけ平行移動すると

$$y + 4 = (x - 2)^2 + a(x - 2) + b$$

$$y = x^2 + (a - 4)x + b - 2a$$

これが $y = x^2 - 6x + 8$ より、 $a - 4 = -6, b - 2a = 8$

よって、 $a = -2, b = 4$

例3

2 次関数 $y=2x^2-4x+4$ のグラフを，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

- (1) x 軸 (2) y 軸 (3) 原点

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad y &= 2x^2 - 4x + 4 \\ &= 2\{x^2 - 2x\} + 4 \\ &= 2\{(x-1)^2 - 1\} + 4 \\ &= 2(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

頂点の座標は， $(1, 2)$

$y=2x^2-4x+4$ を x 軸に関して対称移動すると，
頂点は $(1, -2)$ に移り，上下が反転するから，得られる放物線は

$$y = -2(x-1)^2 - 2 \quad \therefore y = -2x^2 + 4x - 4$$

(2) $y=2x^2-4x+4$ を y 軸に関して対称移動すると，
頂点は $(-1, 2)$ に移り，形は変わらないので，得られる放物線は

$$y = 2(x+1)^2 + 2 \quad \therefore y = 2x^2 + 4x + 4$$

(3) $y=2x^2-4x+4$ を原点に関して対称移動すると，
頂点は $(-1, -2)$ に移り，上下が反転するから，得られる放物線は

$$y = -2(x+1)^2 - 2 \quad \therefore y = -2x^2 - 4x - 4$$

別解 対称移動の一般論を利用。

(1) $f(x)=2x^2-4x+4$ とおく

$y=f(x)$ を x 軸に関して対称移動すると，

$$\begin{aligned} -y &= f(x) \\ -y &= 2x^2 - 4x + 4 \quad \therefore y = -2x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

(2) $y=f(x)$ を y 軸に関して対称移動すると，

$$\begin{aligned} y &= f(-x) \\ y &= 2(-x)^2 - 4(-x) + 4 \quad \therefore y = 2x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

(3) $y=f(x)$ を原点に関して対称移動すると，

$$\begin{aligned} -y &= f(-x) \\ -y &= 2(-x)^2 - 4(-x) + 4 \quad \therefore y = -2x^2 - 4x - 4 \end{aligned}$$

(5) 2 次関数の決定

2 次関数の決定問題では、頂点や軸が分かっているならば、2 次関数を標準形 $y=a(x-p)^2+q$ とおき、頂点や軸が分かっていないときは、2 次関数を一般形 $y=ax^2+bx+c$ とおくのが基本である。他にもおき方はあるが、問題によって 2 次関数を適切な形で置くことが重要である。

また、グラフをかくときは、そのグラフから 2 次関数の式が 1 通りに定まるように通る点を書く必要がある。頂点が分かっているときは、頂点と他 1 点、それ以外の場合は、3 点を書く必要があります。これは、未知数の数からも分かる。

例 4

- (1) a, b, c を定数とする。2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが点 $(1, 1)$ を頂点とし、かつ点 $(0, 3)$ を通るとき、 a, b, c の値を求めよ。
- (2) 頂点の x 座標が 1 で、2 点 $(-1, -5), (2, 1)$ を通る放物線の方程式を求めよ。
- (3) 2 点 $(1, 3), (-4, -7)$ を通り、直線 $x=-2$ を軸とする放物線の方程式を求めよ。

解説

- (1) 頂点が $(1, 1)$ より

$$y=a(x-1)^2+1 \quad (a \neq 0)$$

とおける

点 $(0, 3)$ を通るから

$$3=a+1 \quad \therefore a=2$$

よって

$$y=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$$

$$\therefore a=2, b=-4, c=3$$

- (2) 頂点の x 座標が 1 より

$$y=a(x-1)^2+q \quad (a \neq 0)$$

とおける

これが 2 点 $(-1, -5), (2, 1)$ を通るから

$$-5=4a+q, 1=a+q$$

$$\therefore a=-2, q=3$$

よって、

$$y=-2(x-1)^2+3 \quad \therefore y=-2x^2+4x+1$$

(3) 軸が $x = -2$ より

$$y = a(x+2)^2 + q$$

とおける

これが 2 点 $(1, 3), (-4, -7)$ を通るから

$$3 = 9a + q, \quad -7 = 4a + q$$

$$\therefore a = 2, \quad q = -15$$

よって

$$y = 2(x+2)^2 - 15 \quad \therefore y = 2x^2 + 8x - 7$$

例5

(1) a, b, c を定数とする。放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が、3 点 $(-1, 6), (1, 0), (2, 3)$ を通るとき、 a, b, c の値とその頂点の座標を求めよ。

(2) 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $(1, 0), (-2, 0), (2, 8)$ を通るとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

(3) グラフの頂点の座標が $(2, -9)$ で、 x 軸から切り取る線分の長さが 6 である 2 次関数を求めよ。

(4) x 軸に接し、2 点 $(2, 3), (-1, 12)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

解説

(1) $y = ax^2 + bx + c$ が $(-1, 6), (1, 0), (2, 3)$ を通るから

$$6 = a - b + c$$

$$0 = a + b + c$$

$$3 = 4a + 2b + c$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -3, \quad c = 1$$

よって

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

これを変形すると

$$y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

したがって、頂点の座標は $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

(2) $y = ax^2 + bx + c$ が $(1, 0), (-2, 0)$ を通るから

$$y = a(x-1)(x+2)$$

とおける

これが $(2, 8)$ を通るから、 $8 = 4a \quad \therefore a = 2$

よって

$$y=2(x-1)(x+2) \quad \therefore y=2x^2+2x-4$$

したがって、 $b=2, c=-4$

☐ 2点 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ を通る 2 次関数は、 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおける。

$y=ax^2+bx+c$ は、因数定理より、 $y=a(x-k)(x-l)$ と変形できる。

$x=\alpha, \beta$ で $y=0$ となるためには、 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ となるしかない。

(3) グラフの頂点の座標が $(2, -9)$ であるから

軸の方程式は $x=2$

よって、グラフは直線 $x=2$ に関して対称で、

x 軸から切り取る線分の長さが 6 より、2 点 $(-1, 0), (5, 0)$ を通る

したがって、求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)(x-5) \quad (a \neq 0)$$

とおける

これが $(2, -9)$ を通るから

$$-9=-9a \quad \therefore a=1$$

よって、求める 2 次関数は

$$y=(x+1)(x-5) \quad \therefore y=x^2-4x-5$$

(4) x 軸に接するから、放物線の方程式は

$$y=a(x-b)^2 \quad (a \neq 0)$$

とおける

これが $(2, 3), (-1, 12)$ を通るから

$$3=a(2-b)^2, 12=a(-1-b)^2$$

これらを連立して、

$$4a(2-b)^2=a(1+b)^2$$

$$16-16b+4b^2=1+2b+b^2 \quad (a \neq 0)$$

$$(b-1)(b-5)=0 \quad \therefore b=1, 5$$

$b=1$ のとき、 $a=3$ 、 $b=5$ のとき、 $a=\frac{1}{3}$

よって、 $y=3(x-1)^2, y=\frac{1}{3}(x-5)^2$

補1

(1) 放物線 $y = -2x^2 + 4x - 4$ を x 軸に関して対称移動し、更に x 軸の方向に 8, y 軸の方向に 4 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$y = \boxed{}x^2 - \boxed{}x + \boxed{}$ である。

(2) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ を原点に関して対称移動し、更に x 軸方向に 3, y 軸方向に 6 だけ平行移動すると、放物線 $y = -x^2 + 4x - 7$ が得られるという。このとき、 $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ となる。

解説

$$\begin{aligned}(1) \quad y &= -2x^2 + 4x - 4 \\ &= -2(x-1)^2 - 2\end{aligned}$$

上に凸の放物線、頂点は $(1, -2)$

これを x 軸に関して対称移動すると、

頂点は $(1, 2)$ で、下に凸(x^2 の係数は 2)の放物線となる

これを x 軸方向に 8, y 軸方向に 4 だけ平行移動すると、

頂点は $(9, 6)$ で、下に凸の放物線となるから

$$\begin{aligned}y &= 2(x-9)^2 + 6 \\ \therefore y &= 2x^2 - 36x + 168\end{aligned}$$

$$(2) \quad y = -x^2 + 4x - 7 = -(x-2)^2 - 3$$

上に凸の放物線で、頂点は $(2, -3)$

これを x 軸方向に -3 , y 軸方向に -6 だけ平行移動すると、

上に凸の放物線で、頂点は $(-1, -9)$

これを原点に関して対称移動すると、

下に凸(x^2 の係数は 1)の放物線で、頂点は $(1, 9)$ より

$$\begin{aligned}y &= (x-1)^2 + 9 = x^2 - 2x + 10 \\ \therefore a &= -2, \quad b = 10\end{aligned}$$

補2

(1) 放物線 $y=x^2-4x-5$ と直線 $x=1$ に関して対称な放物線の方程式を求めよ。また、直線 $y=2$ に関して対称な放物線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(1, 2)$ に関し、曲線 $y=2x^2-3x+4$ と点対称の位置にある図形の方程式を求めよ。

解説

$$(1) y=x^2-4x-5=(x-2)^2-9 \dots \textcircled{1}$$

下に凸の放物線、頂点は $(2, -9)$

①を $x=1$ に関して対称移動すると

頂点は $(0, -9)$ で、下に凸の放物線となるから

$$y=x^2-9$$

①を $y=2$ に関して対称移動すると

頂点は $(2, 13)$ で、上に凸(x^2 の係数は -1)の放物線となるから

$$y=-(x-2)^2+13$$

$$\therefore y=-x^2+4x+9$$

$$(2) y=2x^2-3x+4=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

下に凸の放物線、頂点は $\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$ と $(1, 2)$ に関して対称な点を (X, Y) とすると

$$\frac{\frac{3}{4}+X}{2}=1, \quad \frac{\frac{23}{8}+Y}{2}=2$$

$$\therefore X=\frac{5}{4}, Y=\frac{9}{8} \quad (\text{これが求める放物線の頂点})$$

よって、求める放物線は

$$y=-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

$$\therefore y=-2x^2+5x-2$$

確認問題3

2次関数 $f(x)$ は、 $|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|=|f(4)|=1$ を満たす。 $f(x)$ を求めよ。

(解説)

2次関数のグラフの対称性から、軸が $x=\frac{5}{2}$ より

$$f(x)=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+q \quad (a \neq 0)$$

とおける

(i) $a > 0$ のとき

$f(1)=f(4)=1, f(2)=f(3)=-1$ より

$$\frac{9}{4}a+q=1, \frac{1}{4}a+q=-1$$

$$\therefore a=1, q=-\frac{5}{4}$$

よって、

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \quad \therefore f(x)=x^2-5x+5$$

(ii) $a < 0$ のとき

$f(1)=f(4)=-1, f(2)=f(3)=1$ より

$$\frac{9}{4}a+q=-1, \frac{1}{4}a+q=1$$

$$\therefore a=-1, q=\frac{5}{4}$$

よって

$$f(x)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \quad \therefore f(x)=-x^2+5x-5$$

(i), (ii)より

$$f(x)=x^2-5x+5, f(x)=-x^2+5x-5$$

参考 平行移動

この節で学んだように、 $y=ax^2$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると、 $y=a(x-p)^2+q$ となる。これが一般的にどのように導かれるかを考える。軌跡と領域の範囲の考え方なので、軌跡と領域を学習してからまた考えてみてもよい。

$y=ax^2$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式を求める。

右図において、破線の放物線が $y=ax^2$ であり、実線の放物線が求める曲線である。

$y=ax^2$ 上の点を (s, t) とし、それを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した求める曲線上の点を

(X, Y) とする。 X と Y の関係式が、求める曲線の方程式である。

(s, t) を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した点が (X, Y) より

$$\begin{cases} X=s+p \\ Y=t+q \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s=X-p \\ t=Y-q \end{cases} \quad \dots \text{①}$$

が常に成り立つ。 (s, t) は $y=ax^2$ 上の点であるから、

$$t=as^2$$

①を代入して、

$$Y-p=a(X-p)^2 \quad \therefore Y=a(X-p)^2+q$$

求める曲線上の点 (X, Y) は、すべてこの関係式を満たすので、これが求める曲線の方程式である。逆に、この方程式を満たす点 (X, Y) の集合が、求める曲線である。

この X を x 、 Y を y と書き換えると、

$$y=a(x-p)^2+q$$

となる。

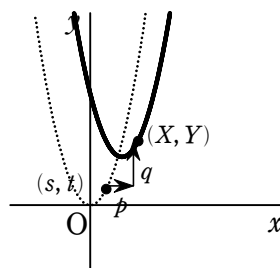
一般に、 $y=f(x)$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものは、同様に考えて、 $y-q=f(x-p)$ となる。

例えば、 (p, q) を通る直線は、

原点を通る直線 $y=ax$ を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものと考え、 x を $x-p$ 、 y を $y-q$ と書き換えて、

$$y-q=a(x-p) \quad \therefore y=a(x-p)+q$$

となる。



参考 対称移動

$y=f(x)$ を

(1) x 軸に関して対称移動したものは $-y=f(x)$

(2) y 軸に関して対称移動したものは $y=f(-x)$

(3) 原点に関して対称移動したものは $-y=f(-x)$

(1) x 軸対称

$y=f(x)$ 上の点を (s, t) とし、それを x 軸に関して対称移動した点を (X, Y) とする。

X と Y の関係式が求める曲線の方程式である。

(s, t) を x 軸に関して対称移動した点が (X, Y) より

$$\begin{cases} X=s \\ Y=-t \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} s=X \\ t=-Y \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が常に成り立つ。 (s, t) は $y=f(x)$ 上の点より

$$t=f(s)$$

①を代入して、

$$-Y=f(X)$$

求める曲線上の点 (X, Y) は、すべてこの関係式を満たすので、これが求める曲線の方程式である。逆に、この方程式を満たす点 (X, Y) の集合が求める曲線である。

この X を x 、 Y を y と書き換えると、

$$-y=f(x)$$

となる。

(2) y 軸対称

$y=f(x)$ 上の点を (s, t) とし、それを y 軸に関して対称移動した点を (X, Y) とすると

$$X=-s, Y=t$$

が成り立つことから、あとは、同様にして求まる。

(3) 原点对称

$y=f(x)$ 上の点を (s, t) とし、それを原点に関して対称移動した点を (X, Y) とすると

$$X=-s, Y=-t$$

が成り立つことから、あとは、同様にして求まる。

