

標準問題演習 10. 数列

[1]

d) $a_3 = 12$ より

$$a + 2d = 12 \dots ①$$

$S_3 > 0$ より

$$\frac{3}{2}(2a + 7d) > 0 \quad \therefore 2a + 7d > 0 \dots ②$$

$S_4 \leq 0$ より

$$\frac{4}{2}(2a + 8d) \leq 0 \quad \therefore a + 4d \leq 0 \dots ③$$

① より $a = 12 - 2d$

② より

$$2(12 - 2d) + 7d > 0 \quad \therefore d > -8$$

③ より

$$(12 - 2d) + 4d \leq 0 \quad \therefore d \leq -6$$

よって

$$-8 < d \leq -6$$

e) $a_n = a + (n-1)d$

① より

$$a_n = (2 + (n-3)d)$$

$n > 3, -8 < d \leq -6$ より

$$(2 - 8(n-3)) < a_n \leq (2 - 6(n-3))$$

$$\therefore -8n + 36 < a_n \leq -6n + 30 //$$

②, $-8 < d \leq -6$ と $1 \leq d \leq 2$ より

$a_n > 0$ とするより

$$-8n + 36 \geq 0 \quad \therefore n \leq \frac{9}{2}$$

$a_{n+1} \leq 0$ とするより

$$-6(n+1) + 30 \leq 0 \quad \therefore n \geq 4$$

n は自然数より $n = 4$

f) $d = -6$ のとき

$n = 4, 5$ のとき $S_n = 0$ ($a_n = 0$)

$$S_4 = \frac{4}{2}(2a + 3d)$$

$$= 4a + 6d = 4a - 2d = 60$$

g) $-8 < d < -6$ のとき

$n = 4$ のとき $S_n = 0$

$$S_4 = 4a - 2d //$$

<point>

1. 等差数列の一般項、初項と公差

[2]

$$a_n = 3 \cdot 9^{n-1} = \boxed{3^n}$$

$$S_n = 5 + 4(n-1) = \boxed{4n+1}$$

($n=1, 2, \dots$)
 $9^n \in 4$ で割り、 1 余り

3, 1, 3, 1, ...

↑を足して

$$9^{2m+1} = 9 \cdot 9^{2m} = 9 \cdot 9^m$$

$$9^{2m} = 9^m \equiv 1 \equiv 9$$

とくり返す。{ S_n } は 4 で割り、 1 余る数列である

$c_1 = 9$

$$a_n = 9^{2n} = 9^n //$$

<point>

1. 等差数列の一般項

初項と公差の値を決定する

[3]

d) $\alpha^2 + a\alpha^2 + b\alpha - 64 = 0$ の3つの実数解を

$\alpha - k, \alpha, \alpha + k$ ($k \neq 0$) とおく

3解と係数の関係より 3項等比数列

$$\begin{cases} 9\alpha = -a \\ \alpha(\alpha - k) + \alpha(\alpha + k) + (\alpha - k)(\alpha + k) = -b \\ \alpha(\alpha - k)(\alpha + k) = 64 \end{cases}$$

3つの解の積は 64 //

(d) $(\alpha-k)$
 ① $\alpha-k, \alpha+k, \alpha$ の順に等差数列 α とす

$$\begin{aligned}(\alpha+k)^2 &= \alpha(\alpha-k) \\ \alpha^2 + 2\alpha k + k^2 &= \alpha^2 - \alpha k \\ k(3\alpha + k) &= 0 \\ \therefore k &= -3\alpha\end{aligned}$$

② $\alpha^2 = -8 \quad \therefore \alpha = -2, k = 6$
 $\therefore \alpha$ とす 3α の順に $-8, -2, 4$

② $\alpha+k, \alpha, \alpha-k$ の順に等差数列 α とす

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (\alpha-k)(\alpha+k) \\ \alpha^2 &= \alpha^2 - k^2 \\ k^2 &= 0 \quad \therefore k \text{ は } 0\end{aligned}$$

($\alpha+k$) (α)
 ③ $\alpha, \alpha-k, \alpha+k$ の順に等差数列 α とす

$$\begin{aligned}(\alpha-k)^2 &= \alpha(\alpha+k) \\ \alpha^2 - 2\alpha k + k^2 &= \alpha^2 + \alpha k \\ k(3\alpha - k) &= 0 \\ \therefore k &= 3\alpha\end{aligned}$$

② $\alpha^2 = -8 \quad \therefore \alpha = -2, k = 6$
 $\therefore \alpha$ とす 3α の順に $-8, -2, 4$

③ α とす 3α の順に

$-8, -2, 4$

<point>

1. 等差中項, 等比中項

[4]

$$\begin{aligned}d) S_n &= \frac{1}{2} \{ 6(1+2+3) - 2(1+2+3) \} \\ &\quad + 2(1+2+3) \\ &= 4(1+2+3) = 24\end{aligned}$$

1+1	1+2	1+3
2+1	2+2	2+3
3+1	3+2	3+3

$$\begin{aligned}T(n) &= \frac{1}{2} \{ (1+2+3)(1+2+3) - (1^2+2^2+3^2) \} \\ &\quad + (1^2+2^2+3^2) \\ &= \frac{1}{2} (1+2+3)^2 - \frac{1}{2} (1^2+2^2+3^2) \\ &= 18 + 7 = 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e) S_n &= \frac{1}{2} \{ 2n(1+2+\dots+n) - 2(1+2+\dots+n) \} \\ &\quad + 2(1+2+\dots+n) \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)^2 \\ T(n) &= \frac{1}{2} (1+2+\dots+n)^2 + \frac{1}{2} (1^2+2^2+\dots+n^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{24} n(n+1) \{ 2n(n+1) + 2(2n+1) \} \\ &= \frac{1}{24} n(n+1) (3n^2 + 7n + 2) = \frac{1}{3} n^2 \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)\end{aligned}$$

<point>

1. 2. 公式.

[5]

$$\begin{aligned}\{a_n\}: & a, b, c, 4 \\ \{a_n\}: & c, a, b \\ \{c_n\}: & -2, 2 \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad +4\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+c = b \dots ① \\ a+b = c \dots ② \\ b+c = 4 \dots ③ \end{cases}$$

①, ② $\therefore a=0$

①, ③ $\therefore b=c=2$

$\{2n\}$ の初項 $2_1 = -2$

公差 4 の等差数列 $\therefore$

$$2n = -2 + 4(n-1) = 4n-6 //$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k \quad (n \geq 2)$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-6)$$

$$= 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 6(n-1)$$

$$= 2(n-1)(n-3) + 2 \quad (n \geq 2)$$

$\therefore$ $n=1$ のとき $a_1 = 2$

$$a_n = 2(n-1)(n-3) + 2 \quad (n \geq 1) //$$

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n \geq 2) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 - 8k + 8) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{3} (n-1)(2n-1) - 8 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + 8(n-1) \\
 &= \frac{1}{3} (n-1) (2n(2n-1) - (2n+2)4) \\
 &= \frac{1}{3} (n-1) (2n^2 - 9n + 2) \quad (n \geq 2)
 \end{aligned}$$

∴ 当 $n=1$ 时 $a \geq 3$ 时 $a \geq 3$ 成立.

$$x_n = \frac{1}{3} (n-1) (2n^2 - 9n + 2) \quad (n \geq 1) //$$

<point>

1. 递推关系.

[6]

$$d) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)}{3^{k+1}} \quad a_k \text{ と } b_k \text{ と}$$

$$S_n = -\frac{1}{4} (2n+1)(2n+3)$$

$$S_1 = -\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 5 = -\frac{15}{4} \text{ あり}$$

$$S_2 = -\frac{15}{4} \quad \therefore a_1 = -\frac{5}{8}$$

$n \geq 2$ とき

$$\begin{aligned}
 S_n - S_{n-1} &= -\frac{1}{4} (2n+1)(2n+3) + \frac{1}{4} (2n-1)(2n+1) \\
 &= -\frac{1}{4} (2n+1) [(2n+3) - (2n-1)] = -(2n+1) //
 \end{aligned}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}} a_n = -(2n+1)$$

$$a_n = -\frac{3^{n+1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 2)$$

∴

$$a_n = \begin{cases} -\frac{5}{8} & (n=1) \\ -\frac{3^{n+1}(2n+1)}{(n+1)(n+2)} & (n \geq 2) \end{cases} //$$

$$\begin{aligned}
 Q/P) \quad S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)} \quad \begin{matrix} -2n+2(n+2)+1(n+1) \\ \therefore a=1, b=3 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$d) \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a'}{n+1} + \frac{b'}{n+2}$$

$$\therefore a_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n+2}$$

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{5}{8} + \left(\frac{3}{3} - \frac{3^2}{4} \right) + \left(\frac{3^2}{4} - \frac{3^3}{5} \right) + \dots \\
 &\quad \dots + \left(\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n+2} \right) \\
 &= -\frac{5}{8} - \frac{3^n}{n+2} //
 \end{aligned}$$

<point>

1. 递推关系 $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)$
2. S_n と a_n .

[7]

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \\
 -) 3S_n &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^n \\
 S_n - 3S_n &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n \quad // \text{ } 3a_n
 \end{aligned}$$

$$\therefore 2C = [3]$$

$$\begin{aligned}
 -2S_n &= \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \cdot 3^n \\
 &= \frac{-(2n-1) \cdot 3^n - 1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4} //$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) \cdot 3^{n-1} \\
 -) 3T_n &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot 3^n + n(n+1) \cdot 3^n \\
 -2T_n &= 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n \cdot 3^{n-1} - n(n+1) \cdot 3^n \\
 &= 2 \cdot (1 + 3 + \dots + 3^{n-1}) - n(n+1) \cdot 3^n \\
 &= 2 \cdot \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4} - n(n+1) \cdot 3^n \\
 &= \frac{-(2n+1) \cdot 3^n + 1}{2} \quad \therefore T_n = \frac{(2n+1) \cdot 3^n - 1}{4} //
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1) \cdot 3^{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n (k^2 \cdot 3^{k-1} + k \cdot 3^{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 3^{k-1} + \sum_{k=1}^n k \cdot 3^{k-1} \quad \text{S}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 3^{k-1} &= T_n - S_n \\
 &= \frac{(2n+1)3^n + 1}{4} - \frac{(2n-1)3^n - 1}{4} \\
 &= \frac{(2n^2 + 2n + 1)3^n + 1}{2}
 \end{aligned}$$

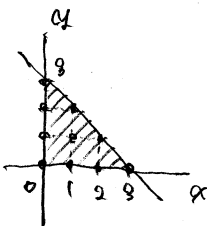
<point>

1. 等差数列と等比数列の積

[8]

d) 1. 等差数列

図の斜線部分(270の境界を
含む)内の格子点の個数を求める



$$\text{図} = \frac{1}{2} \left\{ \text{正方形} - \text{斜線} \right\} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \times (4^2 - 4) + 4 = 10 \quad \text{[別解]}$$

$x+y \leq n, x \geq 0, y \geq 0$ (4点格点)の個数は
(2) 格子点

$$\frac{1}{2} (n^2 - n) + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$x+y+z \leq n, x, y, z \geq 0$ (9点格点)の個数は

$0 \leq z \leq n$ であり、 $z = k$ ($k=0, 1, \dots, n$) で与えられ
(a) (b) (c)

$$x+y+k \leq n$$

$$x+y \leq n-k$$

この平面に与えられた格子点の個数は上の結果より

$$\frac{1}{2} (n-k)(n-k+1)$$

ゆえに $k=0, 1, \dots, n$ で与えられる

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} (n-k)(n-k+1)$$

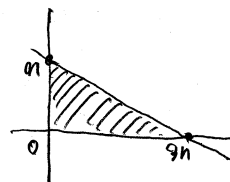
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \{ (n-k+1) - (2n+1-k-k^2) \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \{ (n+1)^2 - \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \} \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1) \{ 3(n+1) - (2n+1) \} \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)
 \end{aligned}$$

② $\frac{x}{3} + y \leq n, x \geq 0, y \geq 0$

$\therefore y \leq -\frac{x}{3} + n, x \geq 0, y \geq 0$

図3 (x, y) の個数を



$$\frac{1}{2} \{ (n+1)(3n+1) - (n+1) \} + (n+1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1)(3n+2)$$

<point>

1. 格子点の個数

[9]

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \dots$

第1項 和分 第2項 とす

$$\frac{97}{50} \text{ は第49項の } 97 \text{ 番目}$$

第48項の半後分は

$$1+2+\dots+48 = \frac{48}{2} \cdot (1+48) = 1176 \text{ 項}$$

より

$$1176+97=1273 \quad \text{第1273項}$$

③ 第n項の半後の項は

$$\text{第 } \frac{1}{2} n(n+1) \text{ 項}$$

第1000項と第n項の項とを等しく

$$\frac{1}{2} (n-1)n < 1000 \leq \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$(n-1)n < 2000 \leq n(n+1)$$

$$44 \cdot 45 = 1980, 45 \cdot 46 = 2070 \text{ より}$$

$$n=45$$

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 45 \\
 \hline
 90 \\
 270 \\
 \hline
 360 \\
 45 \\
 45 \\
 \hline
 900 \\
 1980 \\
 \hline
 2880
 \end{array}$$

第44群の最後の項より

$$\frac{44 \cdot 45}{2} = 990$$

から第1000項は第45群の10番目の項より

$$\frac{10}{46}$$

③ 第n群の和は

$$\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}n$$

より、その和は

$$\sum_{k=1}^{44} \frac{1}{2}k + \frac{1}{46} + \dots + \frac{10}{46}$$

第44群の和

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 45 + \frac{55}{46} = \frac{99825}{46}$$

<point>

1. 群数列

10

$$d) T_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad T_1 = S_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} \quad T_2 = S_2$$

$k=2n$ と予想できる

$S_n = T_n$ であることは数学的帰納法により示す

① $n=1$ のとき

成り立つ

② $n=k$ ($k=1, 2, \dots$) のとき成り立つと仮定して

$$S_{2k} = T_k$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$T_{k+1} = \frac{1}{(k+1)+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}$$

$$= T_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

S_{2k}

$$= S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = S_{2k+1}$$

よって成り立つ

④ ①から数学的帰納法より

成り立つから $S_n = T_n$ である

⑤ 最小値は 1

最大値は $\frac{1}{2}$

S_n は偶数の項に値をとり奇数の項に値をとり

最大値をとり得る n の偶数のとき

① $S_n = T_n$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$

$$T_{n+1} > T_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

よって $n=2$ のとき最大となる

② 同様にして

最大値をとり得る n の奇数のとき

である

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} < 0$$

よって奇数の項は平均減少

よって $n=1$ のとき最大となる

<point>

1. 数学的帰納法 (1 段階仮定)

11

① 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = 1 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 64 - 2 \cdot 1 = 62$$

② $n=1, 2$ のとき

$\alpha^n + \beta^n$ は偶数である

③ $n=k, k+1$ のとき成り立つと仮定して

$$\alpha^k + \beta^k = 2N_1, \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} = 2N_2 \quad (N_1, N_2 \text{ は整数})$$

$$n = k + 2 \text{ のとき } \alpha^k \beta^2 \text{ と } \alpha^2 \beta^k$$

$$\begin{aligned} \alpha^k + \beta^k &= (\alpha + \beta)(\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}) - \alpha\beta(\alpha^{k-2} + \beta^{k-2}) \\ &= 4.2N_k - 1.2N_{k-1} \\ &= 2(4N_k - N_{k-1}) \end{aligned}$$

より $\alpha^k \beta^2$

①. ①から数学的帰納法より

$\alpha^m \beta^n$ は偶数である

② $\beta = 2\sqrt{3}$ から $0 < \beta < 1$ より

$$0 < \beta^m < 1$$

$$\alpha^m = (\alpha + \beta)^m - \beta^m \text{ より}$$

$$(\alpha + \beta)^m - 1 < \alpha^m < (\alpha + \beta)^m$$

$$\therefore [\alpha^m] = (\alpha + \beta)^m - 1 \quad (\alpha + \beta \text{ は整数})$$

①から $\alpha^m \beta^n$ は偶数より

$[\alpha^m]$ は奇数である

<point>

1. 数学的帰納法 (2段階仮定)

[12]

① $n = 1$ のとき

$$0 \leq a_1 \leq a_1$$

$$0 \leq a_1 \leq 0 \text{ より } a_1 = 0$$

② $n = 1, 2, \dots, l$ のとき成り立つと仮定し

$$a_n = 0$$

$n = l + 1$ のとき成り立つことを示す

$$0 \leq a_{l+1} \leq \sum_{k=1}^{l+1} a_k$$

$$0 \leq a_{l+1} \leq a_{l+1} \quad (\text{仮定より})$$

$$0 \leq a_{l+1} \leq 0 \text{ より } a_{l+1} = 0$$

より成り立つ

①. ①から数学的帰納法より

題意は示す

<point>

1. 数学的帰納法 (全段階仮定)