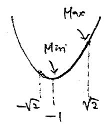
$\boxed{38}$ [2012 弘前大]

点 $(a,\ b)$ は円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとする。
(1) $t=a+b$ とおくとき，$a+ab+b$ を t の式で表せ。
(2) $a+ab+b$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $t=a+b$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $a^2+b^2=1$ より
$(a+b)^2-2ab=1$
$2ab=t^2-1$
$\therefore ab=\frac{t^2-1}{2}$

$a+ab+b=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$ //

(2) $s^2-(a+b)s+ab=0$ すなわち
$s^2-ts+\frac{t^2-1}{2}=0$
$2s^2-2ts+t^2-1=0$
の2解は a,b である
a,b は実数であるから判別式を D とすると $D\geqq0$ より
$D/4=t^2-2(t^2-1)$
$=-t^2+2\geqq0$　　$\therefore -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ ← 線形計画法で求めてもよい
$a+ab+b=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$ より



最大値 $\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ $(t=\sqrt{2})$
小　-1 $(t=-1)$ //

注
$a^2+ab+b=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$ $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$
例えば
$t=2$ とすると
$a^2+ab+b^2=\frac{7}{2}$ と実数値をとるが…
このとき a,b は
$2s^2-4s+3=0$
$\therefore s=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=a,b$
で a,b は実数ではない
a,b は座標上の点であるから実数より
a^2+ab+b^2 は $\frac{7}{2}$ という値をとれない
よって(その値をとるときに) a,b が実数となるかチェックしなければならない (逆像法)

$\boxed{39}$ [Ⅰ. 1997 日本女子大　Ⅱ. 1997 関西学院大]

Ⅰ. x, y が方程式 $x^2+y^2-2(x+y)-6=0$ を満たすとき
(1) $x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ.
(2) $x+y-2xy$ の最大値を求めよ.

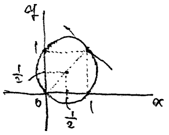
Ⅱ. 変数 x, y は $x^2+y^2=1, x>0$ を満たす実数とする.
(1) $t=x+y$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.
(2) $S=3x^2+8xy+3y^2$ とおくとき，S の最大値，最小値およびそのときの x, y の値を求めよ.

$\boxed{40}$ [Ⅰ. 2011 神戸大　Ⅱ. 2011 慶応義塾大]

Ⅰ. 実数 $x,\ y$ に対して，等式 $x^2+y^2=x+y$ ……① を考える。$t=x+y$ とおく。
(1) ① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。
(2) x と y が ① の等式を満たすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) x と y が ① の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

Ⅱ. xy 平面上に，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と，その円上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がある。
$x+y=t$ とおくとき，
(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
(2) xy を t の式で表せ。
(3) x^3+y^3 のとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅰ(1) $x^2+y^2=x+y$
$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$



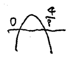
(2) $y=-x+t$ が ① と共有点をもつときの t の範囲を求めればよい
$0\leqq t\leqq2$ //

(3) $F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$
$t=x+y$ より
$t^2=x^2+y^2+2xy$
$=x+y+2xy$
$=t+2xy$
$\therefore xy=\frac{t^2-t}{2}$

よって
$F=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy(x+y)$
$=(x+y)^3-4xy(x+y)$
$=t^3-4\cdot\frac{t^2-t}{2}\cdot t$
$=-t^3+2t^2$

$f(t)=-t^3+2t^2$ $(0\leqq t\leqq2)$ とおく
$f'(t)=-3t^2+4t$
$=-t(3t-4)$
$f'(t)=0$ とすると $t=0,\ \frac{4}{3}$

t	0		$\frac{4}{3}$		2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	極大	↘	



$t=\frac{4}{3}$ で極大かつ最大
最大値 $f(\frac{4}{3})=\frac{32}{27}$
$f(0)=0,\ f(2)=0$ より
最小値 0 //

$\boxed{41}$ [Ⅰ. 横浜市立大　Ⅱ. 2014 近畿大　Ⅲ. 2012 名古屋市立大]

Ⅰ. x, y が $x\geqq0, y\geqq0$ かつ $x^2+y^2=2$ を満たしながら動くとき，x^3+y^3 のとりうる範囲を求めよ.

Ⅱ. 条件 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ を満たす実数 $x,\ y$ を考える。$t=x+y$ とおく。
(1) t のとりうる値の範囲は
$^{ア}\boxed{}-{}^{イ}\boxed{}\sqrt{^{ウ}\boxed{}}\leqq t\leqq{}^{エ}\boxed{}+{}^{オ}\boxed{}\sqrt{^{カ}\boxed{}}$ である。
(2) $z=x^3+y^3-6xy$ を t で表すと
$z=-\frac{^{キ}\boxed{}}{^{ク}\boxed{}}t^3+{}^{ケ}\boxed{}t^2+{}^{コ}\boxed{}t-{}^{サ}\boxed{}$ となり，z の最大値は
$^{シ}\boxed{}+{}^{ス}\boxed{}\sqrt{^{セ}\boxed{}}$ であり，z の最小値は $^{ソ}\boxed{}-{}^{タ}\boxed{}\sqrt{^{チ}\boxed{}}$
である。

Ⅲ. 実数 $x,\ y$ が $4x^2+y^2=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。
(1) $u=2x+y$ の最小値，最大値を求めよ。
(2) xy を u で表せ。
(3) $8x^3+y^3+8xy$ の最小値，最大値を求めよ。

42 [2021 関西学院大]

2つの実数 x，y は関係式 $x^2-xy+y^2=2$ を満たしながら動くとする。このとき，$x+y-xy$ の最大値を求めよう。$s=x+y$ とおくとき，xy を s の式で表すと $xy=$ ア $\boxed{}$ である。また，s のとりうる値の範囲は イ $\boxed{}\leqq s\leqq$ ウ $\boxed{}$ である。

したがって，$x+y-xy$ の最大値は エ $\boxed{}$ である。

$x^2-xy+y^2=2$ より

$(x+y)^2-3xy=2$

$3xy=s^2-2$　∴ $xy=\boxed{\frac{s^2-2}{3}}$ (ア)

$t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち

$t^2-st+\frac{s^2-2}{3}=0$ の2解は x, y であり

x, y は実数であるから 判別式を D として $D\geqq 0$ より

$s^2-4\cdot\frac{s^2-2}{3}\geqq 0$

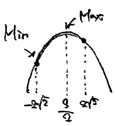
$-s^2+8\geqq 0$

$s^2\leqq 8$　∴ イ $\boxed{-2\sqrt{2}}\leqq s\leqq$ ウ $\boxed{2\sqrt{2}}$

$x+y-xy=s-\frac{s^2-2}{3}$

$=-\frac{s^2}{3}+s+\frac{2}{3}$

$=-\frac{1}{3}\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{12}$



の最大値は

$\frac{17}{12}$ //

45 [2023 高知大]

実数 x，y が $x^2-xy+y^2-1=0$ を満たすとする。また，$t=x+y$ とおく。

(1)　xy を t を用いて表せ。

(2)　t のとる値の範囲を求めよ。

(3)　$3x^2y+3xy^2+x^2+y^2+5xy-6x-6y+1$ のとる値の範囲を求めよ。

(1) $x^2-xy+y^2-1=0$ より

$(x+y)^2-3xy-1=0$

$3xy=t^2-1$

∴ $xy=\frac{t^2-1}{3}$ //

(2) $s^2-(x+y)s+xy=0$ すなわち

$s^2-ts+\frac{t^2-1}{3}=0$ の2解は x, y であり

x, y は実数であるから 判別式を D として $D\geqq 0$ より

$t^2-4\cdot\frac{t^2-1}{3}\geqq 0$

$-t^2+4\geqq 0$

$t^2\leqq 4$　∴ $-2\leqq t\leqq 2$ //

(3) $3x^2y+3xy^2+x^2+y^2+5xy-6x-6y+1$

$=3xy(x+y)+(x+y)^2+3xy-6(x+y)+1$

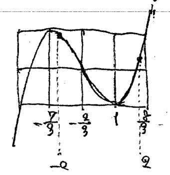
$=3\cdot\frac{t^2-1}{3}\cdot t+t^2+3\cdot\frac{t^2-1}{3}-6t+1$

$=t^3+2t^2-7t$

$f(t)=t^3+2t^2-7t$ $(-2\leqq t\leqq 2)$ とおく。

$f'(t)=3t^2+4t-7=(t-1)(3t+7)$　　$\frac{1}{3}\times\frac{-1}{7}$

$f'(t)=0$ とすると $t=-\frac{7}{3}, 1$



$f(1)=-4$, $f(-2)=14$, $f(2)=2$ より

$-4\leqq f(t)\leqq 14$ //

43 [2004 大阪教育大]

x と y は $x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数とする．また，$w=xy-x-y$ とする．

(1)　$p=x+y$ とするとき，w を p で表せ．

(2)　実数 x と y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たして動くとき，w のとりうる値の範囲を求めよ．

44 [2010 防衛大学校]

実数 x，y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする。

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ。

(2)　s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ。

(4)　k のとりうる値の最大値 M と最小値 m を求めよ。

46 [Ⅰ．2009 同志社大　Ⅱ．2012 京都大]

Ⅰ．実数 x，y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x+y=u$，$xy=v$ とする。u，v の満たす関係式を求めよ。また，u の最大値と最小値を求めよ。

(2)　x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

(3)　x^3+y^3 の最大値と最小値を求めよ。

Ⅱ．実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{47}$ [信州大]

点 (x, y) が領域 $\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ を動くとする．
(1) 点 $(x+y, xy)$ はどのような範囲を動くか，図示せよ．
(2) $x+y+xy$ のとる範囲を求めよ．

(1) $\begin{cases} s=x+y \\ t=xy \end{cases}$ とおく

$x^2+y^2 \leqq 1$ より

$(x+y)^2-2xy \leqq 1$

$s^2-2t \leqq 1$

$\therefore t \geqq \frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}$

$X^2-(x+y)X+xy=0$ すなわち

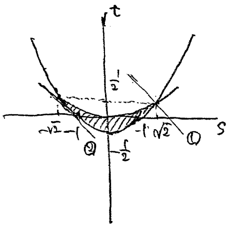
$X^2-sX+t=0$ は x, y を2解とする2次方程式である

x, y は実数であるから

判別式を D として $D \geqq 0$ より

$s^2-4t \geqq 0$

$\therefore t \leqq \frac{s^2}{4}$



$\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{s^2}{4}$

$s^2=2$　$\therefore s=\pm\sqrt{2}$

求める範囲は図の斜線部

ただし境界は含む

(2) $x+y+xy$ すなわち

$s+t=k$ とおく

$t=-s+k$ が(1)の領域と共有点をもつときの

t の範囲を求めればよい

①のとき　$k=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

②のとき

$\frac{s^2}{2}-1=-s+k$　として

$s^2-2s-2k-2=0$

が重解をもつときで，判別式を D として

$D/4=1-(-2k-2)=0$　$\therefore k=-\frac{3}{2}$

よって

$-\frac{3}{2} \leqq x+y+xy \leqq \sqrt{2}+\frac{1}{2}$

$\boxed{48}$ [Ⅰ．青山学院大　Ⅱ．2022 早稲田大]

Ⅰ．x, y は $x^2+y^2<1, x>0, y>0$ を満たす変数である．このとき，
(1) 点 (x, y) の存在範囲を図示せよ．
(2) $z=2x+y$ の取り得る値の範囲を求めよ．
(3) $u=x+y, v=xy$ とおいて，点 (u, v) の存在範囲を図示せよ．
(4) $z=x+y-4xy$ の取り得る値の範囲を求めよ．

Ⅱ．実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 3$ を満たしているとき，$x-y-xy$ の最大値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{49}$

(1) 実数 x, y が $-1<x+y<2, 1<x-y<5$ をみたすとき，$2x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) $-4 \leqq -x+2y \leqq 3, 3 \leqq 2x-y \leqq 6$ のとき，$x^2-2xy+2y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $\begin{cases} s=x+y \\ t=x-y \end{cases}$ とおくと

$-1<s<2,\ 1<t<5$

$x=\frac{s+t}{2},\ y=\frac{s-t}{2}$ より

$2x+y=2\cdot\frac{s+t}{2}+\frac{s-t}{2}$

$=\frac{3}{2}s+\frac{t}{2}$

よって

$-1<2x+y<\frac{11}{2}$

(2) $\begin{cases} s=-x+2y \\ t=2x-y \end{cases}$ とおくと

$-4 \leqq s \leqq 3,\ 3 \leqq t \leqq 6$

$x=\frac{s+2t}{3},\ y=\frac{2s+t}{3}$ より

$x^2-2xy+2y^2=\frac{(s+2t)^2}{9}-2\cdot\frac{(s+2t)(2s+t)}{9}+2\cdot\frac{(2s+t)^2}{9}$

$=\frac{s^2+4st+4t^2-2(2s^2+5st+2t^2)+2(4s^2+4st+t^2)}{9}$

$=\frac{5s^2+2st-2t^2}{9}$

あとはこの最大・最小を求めればよい

第1講参照

$\boxed{50}$ [Ⅰ．2008 東京女子大　Ⅱ．大同工業大　Ⅲ．2017 東京理科大]

Ⅰ．実数 x，y が $0 \leqq 2x+y \leqq 1$ かつ $0 \leqq x-y \leqq 1$ を満たす範囲を動くとき，以下のものを求めよ。
(1)　x のとりうる値の範囲　　(2)　y のとりうる値の範囲
(3)　$x+y$ のとりうる値の範囲

Ⅱ．点 (x, y) は $1 \leqq x+2y \leqq 2$ かつ $2 \leqq 2x+y \leqq 4$ を満たす範囲を動くとする．
(1) $u=x+2y, v=2x+y$ とおくとき，$F=x^2+xy+y^2$ を u, v で表せ．
(2) u を固定するとき，F の最大値を u で表せ．
(3) F の最大値を求めよ．

Ⅲ．(1)　等式 $x^2+y^2=1$ を満たす実数 x，y を考える。$u=3x+y+3$，$v=2x-2y+3$ とするとき，$\frac{u}{v}$ の最大値は $^{ア}\boxed{}+\sqrt{^{イ}\boxed{}}$ であり，

最小値は $^{ウ}\boxed{}-\sqrt{^{エ}\boxed{}}$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を考える。$u=4x-6y+3$，$v=4x+3y-1$ とするとき，u^2+v^2 の最大値は $^{オ}\boxed{}$ であり，最小値は $\frac{^{カ}\boxed{}}{^{キ}\boxed{}}$ である。

$\boxed{51}$ [2011 東京都市大]

2 次関数 $f(x)=ax^2+b$ (a，b は定数) について，2 つの不等式 $1 \leqq f(0) \leqq 2$，$1 \leqq f(1) \leqq 2$ がともに成立しているとする。

(1)　2 つの不等式 $1 \leqq f(0) \leqq 2$，$1 \leqq f(1) \leqq 2$ を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

(2)　$f(2)$ がとりうる最大値と最小値を求めよ。

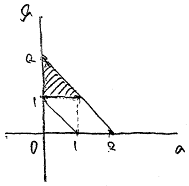
(1) $1 \leqq f(0) \leqq 2$ より

$1 \leqq b \leqq 2$

$1 \leqq f(1) \leqq 2$ より

$1 \leqq a+b \leqq 2$

$\therefore -a+1 \leqq b \leqq -a+2$



境界含む//

(2) $f(2)=4a+b$

斜線部は正解でもよい

$1 \leqq b \leqq 2$，$1 \leqq a+b \leqq 2$．

$c=a+b$ とおくと $a=c-b$

$1 \leqq b \leqq 2$，$1 \leqq c \leqq 2$．

$4a+c=4(c-b)+c=5c-4b$

よって

$-3 \leqq f(2) \leqq 6$ //

$\boxed{52}$ [Ⅰ．2009 上智大　Ⅱ．2017 大阪大]

Ⅰ．1 次関数 $f(x)=ax+b$ で，条件 $3 \leqq f(1) \leqq 6$，$4 \leqq f(2) \leqq 8$ を満たすものを考える。このような 1 次関数 $f(x)$ の中で，$f(5)$ が最大となるのは，$a=$ ア $\boxed{}$，$b=$ イ $\boxed{}$ のときで，$f(5)=$ ウ $\boxed{}$ である。また，$f(5)$ が最小となるのは，$a=$ エ $\boxed{}$，$b=$ オ $\boxed{}$ のときで，$f(5)=$ カ $\boxed{}$ である。

Ⅱ．b，c を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が $0 \leqq f(1) \leqq 2$，$5 \leqq f(3) \leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

最大・最小問題

$\boxed{40}$

II. (1) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ より

$x^2+y^2-2(x+y)=2$

$(x+y)^2-2xy-2(x+y)=2$

$2xy=t^2-2t-2$

∴ $xy=\frac{t^2-2t-2}{2}$

$s^2-(x+y)s+xy=0$ すなわち

$s^2-ts+\frac{t^2-2t-2}{2}=0$ の2解は x, y である

x, y は実数であるから判別式を D とすると

$D\geqq 0$ より

$t^2-\cancel{4}^{\,2}\cdot\frac{t^2-2t-2}{\cancel{2}}\geqq 0$

$-t^2+4t+4\geqq 0$

$t^2-4t-4\leqq 0$

∴ $2-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2+2\sqrt{2}$ ← 線形計画法でもよい。

(2) $xy=\frac{t^2-2t-2}{2}$

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=t^3-3\cdot\frac{t^2-2t-2}{2}\cdot t$

$=-\frac{t^3}{2}+3t^2+3t$

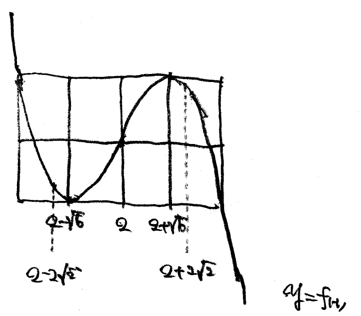
$f(t)=-\frac{t^3}{2}+3t^2+3t$ $(2-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2+2\sqrt{2})$ とおく

$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+6t+3$

$f'(t)=0$ とすると

$t^2-4t-2=0$

∴ $t=2\pm\sqrt{6}$



$f(t)=(t^2-4t-2)(-\frac{1}{2}t+1)+6t+2$

$f(2-\sqrt{6})=6(2-\sqrt{6})+2=14-6\sqrt{6}$

$f(2+\sqrt{6})=6(2+\sqrt{6})+2=14+6\sqrt{6}$

よって

$14-6\sqrt{6}\leqq x^3+y^3\leqq 14+6\sqrt{6}$