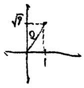
26［Ⅰ. 2015 名城大　Ⅱ. 2015 学習院大］

Ⅰ. 点 $P(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は ア［　］であり，$x^2+2xy+3y^2$ の最大値は イ［　］である。

Ⅱ. xy 平面上に 2 点 $A(0,\ 2)$，$B(2,\ 2)$ と円 $C：x^2+y^2=1$ がある。点 P が C 上を動くとき AP^2+BP^2 の最大値と最小値を求め，また，それらを与える P の座標を求めよ。

Ⅰ. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける



$\sqrt{3}x+y=\sqrt{2}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$ より

最小値は $\boxed{-2\sqrt{2}}$

$x^2+2xy+3y^2=2(\underset{\frac{1+\cos2\theta}{2}}{\cos^2\theta}+2\cos\theta\sin\theta+3\underset{\frac{1-\cos2\theta}{2}}{\sin^2\theta})$

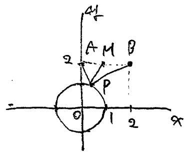
$=2(\sin2\theta-\cos2\theta+1)$

$=2\{\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})+1\}$

$-1\leqq\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})\leqq1$ より

最大値は $2(\sqrt{2}+1)$

Ⅱ. $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける

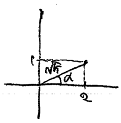


$AP^2+BP^2=\{\cos^2\theta+(\sin\theta-2)^2\}+\{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-2)^2\}$

$=-4\sin\theta+5+(-4\cos\theta-4\sin\theta+9)$

$=14-4(2\sin\theta+\cos\theta)$

$=14-4\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$ （αは図の角）



$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ より

最大値 $14+4\sqrt{5}$，最小値 $14-4\sqrt{5}$

最大値をとるとき

$\sin(\theta+\alpha)=1$　$\therefore\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\therefore P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=(\sin\alpha,\ \cos\alpha)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ //

27［Ⅰ. 名古屋市立大　Ⅱ. 2010 津田塾大　Ⅲ. 2014 東京理科大］

Ⅰ. 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，次の各式のとり得る値の最大値と最小値，およびそれらをとるときの $x,\ y$ の値を求めよ。

(1) x^2+y　　(2) $x-y$　　(3) $2x^2-xy+3y^2$

Ⅱ. 原点を中心とする単位円の $y\geqq0$ の部分を C とし，2 点 $A(-1,\ \sqrt{3})$ と $B(3,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P が曲線 C 上を動くとき，AP^2+BP^2 が最小となるような P の座標を求めよ。

Ⅲ. 座標平面に点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ があり，等式 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ を満たすように点 $P(x,\ y)$ を動かす。線分 AP と BP について考える。

AP^2+BP^2 は $x=\dfrac{ア［　］}{イ［　］}$，$y=\dfrac{ウ［　］}{エ［　］}$ のとき，最小値 オ［　］をとり，

$x=\dfrac{カ［　］}{キ［　］}$，$y=\dfrac{ク［　］}{ケ［　］}$ のとき，最大値 コ［　］をとる。

28［東京理科大］

座標平面において，点 $(x,\ y)$ が楕円 $4x^2+9y^2=36$ 上を動く．このとき，

(1) $x+2y$ の最大値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(2) $x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{3}{2}y^2$ の最大値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

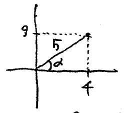
(1) $4x^2+9y^2=36$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける．（[illegible]）

$x+2y=3\cos\theta+4\sin\theta$

$=5\sin(\theta+\alpha)$ （αは図の角）



$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ より

最大値は5

このとき

$\sin(\theta+\alpha)=1$

$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$　$\therefore\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$x=3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=3\sin\alpha=\frac{9}{5}$

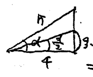
$y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\cos\alpha=\frac{8}{5}$ //

(2) $x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{3}{2}y^2=9\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+6\sin^2\theta$

$=9\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+2\sin2\theta+6\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}(4\sin2\theta+3\cos2\theta)+\frac{15}{2}$

$=\frac{5}{2}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{15}{2}$ （αは上の図の角）



$-1\leqq\sin(2\theta+\alpha)\leqq1$ より

最大値は 10

このとき

$\sin(2\theta+\alpha)=1$

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}$ $(\alpha\leqq2\theta+\alpha<4\pi+\alpha)$

$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2},\ \frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\theta=\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$ のときも同様．

→［別解］中線定理

ABの中点をMとすると 中線定理より

$AP^2+BP^2=2(PM^2+AM^2)$

$=2(PM^2+1)$

PM^2が最大となるとき AP^2+BP^2は最大となる

PMが 〃　　のは O, P, M が一直線上にあり PがOに関してMと同じ側にあるとき

このとき　　（PM>0より PMが最大のとき PM^2は最大）

$AP^2+BP^2=2\{(\sqrt{5}+1)^2+1\}=14+4\sqrt{5}$ //　$P\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ //

29［(1) 福岡教育大　(2) 2006 早稲田大］

(1) 点 $P(x,\ y)$ が $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を動くとき，$x^2+4\sqrt{3}xy-4y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $x,\ y$ が $2x^2+3y^2=1$ を満たす実数のとき，x^2-y^2+xy の最大値を求めよ．

$\boxed{30}$ [高知大]

すべての実数 x, y に対して不等式

$$a(x^2+y^2) \leqq x^2+3xy+5y^2 \leqq b(x^2+y^2)$$

を満たす a, b のうち最大の a と最小の b を求めよ。

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(r>0,\ 0° \leqq \theta < 360°)$ とおくと　(極座標表示)

$ar^2 \leqq r^2(\cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta) \leqq br^2$

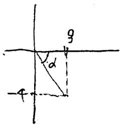
$\therefore a \leqq \cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta \leqq b$

$f(\theta) = \cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + 5\cos^2\theta$ とおく

$= \dfrac{1+\cos2\theta}{2} + \dfrac{3}{2}\sin2\theta + 5\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(3\sin2\theta - 4\cos2\theta) + 3$

$= \dfrac{5}{2}\sin(2\theta+\alpha) + 3$　(αは図の角)



$-1 \leqq \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$\dfrac{1}{2} \leqq f(\theta) \leqq \dfrac{11}{2}$

よって

最大の a は $\dfrac{1}{2}$

最小の b は $\dfrac{11}{2}$

[別解]

$a(x^2+y^2) \leqq x^2+3xy+5y^2 \leqq b(x^2+y^2)$

$x=0, y=0$ のとき a, b は任意

$y \neq 0$ として

$a \leqq \dfrac{x^2+3xy+5y^2}{x^2+y^2} \leqq b$

$\dfrac{x^2+3xy+5y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{(\frac{x}{y})^2+3\frac{x}{y}+5}{(\frac{x}{y})^2+1} \underset{t=\frac{x}{y}}{=} \dfrac{t^2+3t+5}{t^2+1} = k$ とおく

$t^2+3t+5 = k(t^2+1)$

$(k-1)t^2 - 3t + k - 5 = 0$ …①

$k=1$ のとき $t = -\dfrac{4}{3}$

$k \neq 1$ 〃

①をtの方程式とみてtは実数であるから

判別式をDとすると $D \geqq 0$ より

$D = 9 - 4(k-1)(k-5)$

$= -4k^2+24k-11 \geqq 0$

$4k^2-24k+11 \leqq 0$

$(2k-1)(2k-11) \leqq 0$

$\therefore \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{11}{2},\ k \neq 1$

以上より　最大値 $\dfrac{11}{2}$　最小値 $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{31}$ [2015 大阪大]

実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{32}$ [(1) 中央大　(2) 大阪市立大]

(1) x, y を実数とする． $x^2-2xy+5y^2=1$ を満たすとき， x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

(2) $13x^2-8xy+7y^2=1$ のとき， x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

(1) $x^2+y^2 = k$ とおく …①

$x^2-2xy+5y^2 = 1$ …②

②×k − ① より

$(k-1)x^2 - 2kxy + (5k-1)y^2 = 0$

$y=0$ のとき ②より $x=\pm1$　$\therefore k=1$

$y \neq 0$ のとき 両辺 y^2 で割って

$(k-1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2k\cdot\dfrac{x}{y} + 5k - 1 = 0$

$t = \dfrac{x}{y}$ とおいて

$(k-1)t^2 - 2kt + 5k - 1 = 0$ …③

$k=1$ のとき $-2t+4=0$　$\therefore t=2$

$k \neq 1$ のとき

③をtの方程式とみて, tは実数であるから

判別式をDとして $D \geqq 0$ より

$D/4 = k^2 - (k-1)(5k-1)$

$= -4k^2+6k-1 \geqq 0$

$4k^2-6k+1 \leqq 0$

$\therefore \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \leqq k \leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{4},\ k \neq 1$

以上より　最大値 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$,　最小値 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$ //

[別解]

$\begin{cases} x = \sqrt{k}\cos\theta \\ y = \sqrt{k}\sin\theta \end{cases}$ $(0° \leqq \theta < 360°)$ とおく

$x^2-2xy+5y^2=1$ より

$k(\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta) = 1$

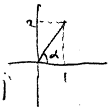
$\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta = \dfrac{1}{k}$

$f(\theta) = \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta$ とおく

$= \dfrac{1+\cos2\theta}{2} - \sin2\theta + 5\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$= -\sin2\theta - 2\cos2\theta + 3$

$= -\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha) + 3$　(αは図の角)



$-1 \leqq \sin(2\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$3-\sqrt{5} \leqq f(\theta) \leqq 3+\sqrt{5}$

$3-\sqrt{5} \leqq \dfrac{1}{k} \leqq 3+\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{3+\sqrt{5}} \leqq k \leqq \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$

$\therefore \dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \leqq k \leqq \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ //

$\boxed{33}$ [2007 学習院大]

実数 x, y が $19x^2+6xy+11y^2=1$ を満たしながら動くとき，x^2+y^2 の最大値，最小値，および，それらを与える x, y の値を求めよ。

$\boxed{34}$ [(1) 信州大　(2) 慶応義塾大　(3) 宮城教育大　(4) 青山学院大]

(1) 実数 x, y が $4^x+2^x\cdot3^y+9^y=7$ を満たすとき，$2^{x+1}+3^{y+1}$ がとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 2つの正の実数 x，y について，$xy^2=10$ のとき，$\log_{10}x\cdot\log_{10}y$ の最大値は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}_{イ}\boxed{}}$ である。

(3) $x\geqq1$ かつ $y\geqq3$ かつ $xy^2=27$ のとき，$(\log_3x)\cdot(\log_3y)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4) 実数 x，y が $(\log_3x)^2+(\log_3y)^2=\log_3x^2-\log_3y^2$ を満たすとき，$\log_3x$，xy，$\dfrac{x}{y}$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(2) $x, y>0$ より

$\log_{10}xy^2=1$

$\log_{10}x+2\log_{10}y=1$

$X=\log_{10}x$, $Y=\log_{10}y$ とおくと

$X+2Y=1$　∴ $X=1-2Y$

$\log_{10}x\cdot\log_{10}y=XY$

$=(1-2Y)Y$

$=-2Y^2+Y$

$=-2(Y-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{8}$

最大値は $\frac{1}{8}$ //

(3) $x, y>0$ より

$\log_3xy^2=3$

$\log_3x+2\log_3y=3$

$X=\log_3x$, $Y=\log_3y$ とおくと

$X\geqq0$, $Y\geqq1$

$X+2Y=3$　∴ $X=3-2Y$

$X\geqq0$ より $Y\leqq\frac{3}{2}$

$\log_3x\cdot\log_3y=XY$

$=(3-2Y)Y$ $(1\leqq Y\leqq\frac{3}{2})$

$=-2(Y-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{8}$

最大値 1

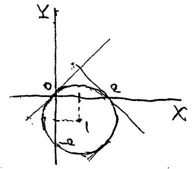
小 0 //

(4) 真数 >0 より $x, y>0$

$X=\log_3x$, $Y=\log_3y$ とおくと

$X^2+Y^2=2X-2Y$

$(X-1)^2+(Y+1)^2=2$ …①



$\log_3x=X$ のとりうる範囲は

$1-\sqrt{2}\leqq\log_3x\leqq1+\sqrt{2}$ //

$x, y>0$ より

$\log_3xy=\log_3x+\log_3y$

$=X+Y=k$ とおいて

$Y=-X+k$

これが①と共有点をもつときの k の範囲は

$-2\leqq k\leqq2$

$-2\leqq\log_3xy\leqq2$

∴ $\frac{1}{9}\leqq xy\leqq9$ //

$\log_3\frac{x}{y}=\log_3x-\log_3y$

$=X-Y=l$ とおく

$Y=X-l$

$0\leqq l\leqq4$

$0\leqq\log_3\frac{x}{y}\leqq4$

∴ $1\leqq\frac{x}{y}\leqq81$ //

$\boxed{35}$ [(1) 駒澤大　(2) 星薬科大　(3) 関西学院大　(4) 青山学院大　(5) 防衛大学校]

(1) x，y はともに正の実数で，$xy=8$ を満たす。このとき，$(\log_2x)^2+(\log_2y)^2$ の最小値は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}_{イ}\boxed{}}$，そのとき x は ${}^{ウ}\boxed{}\sqrt{{}^{エ}\boxed{}}$ となる。

(2) x，y が等式 $x^3y^2=81$ $\left(ただし，x\geqq\dfrac{1}{3},\ y\geqq\dfrac{1}{3}\right)$ を満たすとき，$(\log_3x)^2+\log_3y$ の最大値と最小値を求めよ.

(3) 正の実数 x，y が $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=\log_2x^2+\log_2y^4$ ……① を満たしながら変化している。$X=\log_2x$，$Y=\log_2y$ とおくと，① は X, Y を用いて表すと

$(X-1)^2+(Y-2)^2={}^{ア}\boxed{}$ である。このとき，$\log_2xy^2$ は $(x,\ y)={}^{イ}\boxed{}$ で最大値をとり，$(x,\ y)={}^{ウ}\boxed{}$ で最小値をとる。

(4) $x\geqq1$，$y\geqq1$ で $(\log_2x-1)^2+(\log_2y)^2=5$ とする。このとき，x^2y の最大値と最小値を求めよ。

(5) $(\log_{10}x)^2=\log_{10}y$ という関係があるとき，xy の最小値を求めよ.

$\boxed{36}$ [Ⅰ. 2012 東北大　Ⅱ. 2014 星薬科大　Ⅲ. 2011 岐阜聖徳学園大]

Ⅰ. 実数 x，y が $4^x-4\cdot2^x+9^y-2\cdot3^y\leqq-1$ を満たすとき，2^x+3^y のとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅱ. $x\geqq1$，$y\geqq1$，$3\leqq xy\leqq81$ とする。$k=\dfrac{1}{4}\log_3x+\log_3y$ とおくとき，k がとりえる値の範囲は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}_{イ}\boxed{}}\leqq k\leqq{}^{ウ}\boxed{}$ であり，また，$k=1$ ならば，$\log_3x$ の最大値は ${}^{エ}\boxed{}$，$\log_3y$ の最大値は ${}^{オ}\boxed{}$ である。

Ⅲ. 正の実数 x，y が $(\log_3x)^2+(\log_3y)^2\leqq\log_3x+\log_3y$ を満たしている。

(1) $u=\log_3x$，$v=\log_3y$ とおく。このとき，uv 平面において点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(2) xy のとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅰ. $X=2^x$, $Y=3^y$ とおくと $X>0$, $Y>0$

$X^2-4X+Y^2-2Y\leqq-1$

$(X-2)^2+(Y-1)^2\leqq4$ …

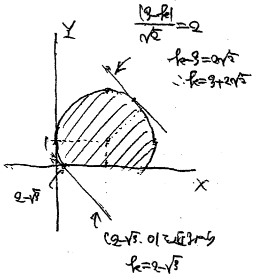
$2^x+3^y=X+Y=k\,(>0)$ とおく

$Y=-X+k$

が円の斜線部と共有点をもつときの k のとりうる値の範囲を求めればよい

グラフより

$2-\sqrt{3}\leqq k\leqq3+2\sqrt{2}$ //



$\boxed{37}$ [Ⅰ. 2021 金沢工業大　Ⅱ. 2019 摂南大　Ⅲ. 2006 成城大]

Ⅰ. 座標平面上で，連立不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$3^x+2^{y+2}\leqq21$，$3^{x+1}+2^y\leqq19$ の表す領域を D とし，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとする。

(1) 3^x+2^y の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) $\dfrac{2^y}{3^x}$ の最大値は ${}^{ウ}\boxed{}$ であり，最小値は $\dfrac{{}^{エ}\boxed{}}{{}_{オ}\boxed{}}$ である。

(3) 9^x+4^y の最大値は ${}^{カ}\boxed{}$ であり，最小値は ${}^{キ}\boxed{}$ である。

Ⅱ. x，y は $x\geqq1$，$y\geqq1$，$8\leqq x^3y^4\leqq64$ を満たす。このとき $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2$ の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，最小値は $\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}_{ウ}\boxed{}}$ である。

Ⅲ. 正の数 x，y が $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2\leqq\log_2\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}\,y^2}$ を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_2x=X$，$\log_2y=Y$ として，上式を X と Y で表せ。

(2) 点 $(X,\ Y)$ の存在範囲を図示せよ。

(3) xy の最大値と，そのときの x と y の値を求めよ。

数3 第1問題

$\boxed{34}$

(1) $X=2^x,\ Y=3^y$ とおくと $X, Y>0$

$X^2+XY+Y^2=7 \cdots ①$

$2^{x+1}+3^{y+1}=2X+3Y>0.\quad =k$ とおく $(k>0)$

$Y=\frac{1}{3}(k-2X)\qquad Y>0$ より $X<\frac{k}{2}$

①に代入して

$X^2+\frac{1}{3}(k-2X)X+\frac{1}{9}(k-2X)^2=7$

$7X^2-kX+k^2-63=0 \cdots ②$

が $0<X<\frac{k}{2}$ に少なくとも1つの実数解をもてばよい。

(i) ②が $X=0$ を解にもつとき

$k^2-63=0\qquad \therefore k=3\sqrt{7}$

このとき他方の解は $X=\frac{3\sqrt{7}}{7}$ となり

$0<X<\frac{k}{2}$ を満たす。

(ii) ②が $X=\frac{k}{2}$ を解にもつとき

$\frac{9}{4}k^2-63=0$

$k^2=28\qquad \therefore k=2\sqrt{7}$

このとき

$7X^2-2\sqrt{7}X-35=0$

$(X-\sqrt{7})(7X+5\sqrt{7})=0$

他方の解は負となり不適

(iii) $X\neq 0, \frac{k}{2}$ である $0<X<\frac{k}{2}$ となる解をもつとき

(ア) $0<X<\frac{k}{2}$ に1つ $X<0, X>\frac{k}{2}$ に1つ解をもつとき

$f(X)=7X^2-kX+k^2-63$ とおくと

$f(0)f(\frac{k}{2})<0$

$(k^2-63)(\frac{9}{4}k^2-63)<0$

$(k-3\sqrt{7})(k-2\sqrt{7})<0\qquad (k>0)$

$\therefore 2\sqrt{7}<k<3\sqrt{7}$

(イ) $0<k<\frac{k}{2}$ に2つの解をもつ

②の判別式をDとして

$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ 0<軸<\frac{k}{2} \\ f(0)>0,\ f(\frac{k}{2})>0 \to k>3\sqrt{7} \end{cases}$$

$D\geqq 0$ より

$D=k^2-28(k^2-63)\geqq 0$

$\cancel{27}^{3}k^2\leqq 28\cdot\cancel{63}^{7}$

$k^2\leqq\frac{7^2\cdot 4}{3}\qquad \therefore k\leqq\frac{14\sqrt{3}}{3}$

$0<軸<\frac{k}{2}$ より

$0<\frac{k}{14}<\frac{k}{2}\qquad k$ は任意

よって

$3\sqrt{7}<k\leqq\frac{14\sqrt{3}}{3}$

(i)〜(iii)より

$2\sqrt{7}<k\leqq\frac{14\sqrt{3}}{3}$ //

$\boxed{36}$

II. $x \geqq 1,\ y \geqq 1,\ 3 \leqq xy \leqq 81$ より

$\log_3 x \geqq 0,\ \log_3 y \geqq 0,\ 1 \leqq \underset{\log_3 x + \log_3 y}{\underset{\shortparallel}{\log_3 xy}} \leqq 4$

$X = \log_3 x,\ Y = \log_3 y$ とおくと

$X \geqq 0,\ Y \geqq 0,\ 1 \leqq X + Y \leqq 4 \cdots ①$

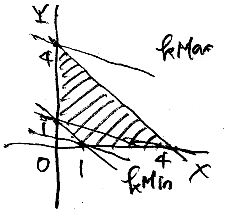
$k = \frac{1}{4}X + Y$ が①と共有点をもつときの

k がとり得る値の範囲を求めればよい

$Y = -\frac{1}{4}X + k$ （k はy切片）

グラフより

$\boxed{\frac{1}{4} \leqq k \leqq 4}$



$k = 1$ のとき

$X = \log_3 x$ の最大値は $\boxed{4}$

$Y = \log_3 y$ 〃 $\boxed{1}$

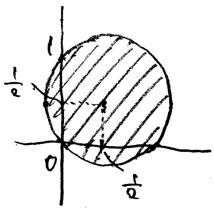
III. (1) $u^2 + v^2 \leqq u + v$

$(u - \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{2})^2 \leqq \frac{1}{2}$

求める存在範囲は

図の斜線部

ただし境界は含む。



(2) $xy > 0$ より

$\log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y$

$= u + v = k$ とおく

これが(1)の領域と共有点をもつとき

$\frac{|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - k|}{\sqrt{2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|k - 1| \leqq 1$

$-1 \leqq k - 1 \leqq 1$

$0 \leqq k \leqq 2$

$0 \leqq \log_3 xy \leqq 2$

$\therefore 1 \leqq xy \leqq 9$ //