

第3章 高次方程式

3.1 高次方程式

(1) 因数分解による高次方程式の解法

x の整式 $P(x)$ が n 次式のとき、方程式 $P(x)=0$ を n 次方程式という。また、3 次以上の方程式を高次方程式という。ここでは、実数を係数とする高次方程式について考える。

高次方程式 $P(x)=0$ は、 $P(x)$ が 2 次以下の整式の積に因数分解できるときには、簡単に解くことができる。

例1

(1) 方程式 $x^3=1$ を解け。

(2) 方程式 $x^3-2x^2-4x+8=0$ を解け。

(3) 方程式 $x^3-x^2-2x+8=0$ の実数解は $x=\boxed{}$ である。

解説

(1) $x^3=1$

$$x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ または } x^2+x+1=0$$

$$\therefore x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) $x^3-2x-4x+8=0$

$$x^2(x-2)-4(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^2-4)=0$$

$$(x-2)^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2, 2$$

(3) $x^3-x^2-2x+8=0$

$$(x+2)(x^2-2x+4)-x(x+2)=0$$

$$(x+2)(x^2-3x+4)=0$$

$x^2-3x+4=0$ の判別式を D とすると、 $D=(-3)^2-4 \cdot 1 \cdot 4=-7<0$ より実数解は、 $x=-2$

例2

- (1) 4 次方程式 $x^4 - 256 = 0$ を解け。
 (2) 方程式 $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$ を複素数の範囲で解け。
 (3) 方程式 $x^4 - 16x^2 + 16 = 0$ を解け。

解説

(1) $x^4 - 256 = 0$

$$(x^2 - 16)(x^2 + 16) = 0$$

$$(x + 4)(x - 4)(x^2 + 16) = 0$$

$$\therefore x + 4 = 0 \text{ または } x - 4 = 0 \text{ または } x^2 + 16 = 0$$

$$\therefore x = \pm 4, \pm 4i$$

(2) $x^4 + 16x^2 - 225 = 0$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 25) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3)(x^2 + 25) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3, \pm 5i$$

(3) $x^4 - 16x^2 + 16 = 0$

$$(x^2 - 4)^2 - 8x^2 = 0$$

$$(x^2 - 4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 = 0$$

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x - 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x - 4) = 0$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x - 4 = 0 \text{ または } x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \pm \sqrt{6}, -\sqrt{2} \pm \sqrt{6}$$

例3

- (1) 方程式 $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$ を解け。
 (2) 4 次方程式 $(x^2 + x - 1)(x^2 + x - 4) = -2$ を解け。
 (3) 方程式 $(x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5) = 44$ を解け。

解説

(1) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$

$$\{(x^2 + x) + 1\}\{(x^2 + x) - 6\} = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x + 3)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, -3, 2$$

$$(2) (x^2 + x - 1)(x^2 + x - 4) = -2$$

$$(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) + 4 = -2$$

$$(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) + 6 = 0$$

$$\{(x^2 + x) - 2\}\{(x^2 + x) - 3\} = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x^2 + x - 3) = 0 \quad \therefore x = 1, -2, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(3) (x + 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5) = 44$$

$$(x + 2)(x - 4)(x + 3)(x - 5) - 44 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 15) - 44 = 0$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 23(x^2 - 2x) + 76 = 0$$

$$(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x - 19) = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm 2\sqrt{5}$$

例4

(1) 方程式 $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ がある。 $x = 0$ は、この方程式の解ではないので、 x^2 で両辺を割り、 $x + \frac{1}{x} = t$ とおくと、 t に関する 2 次

方程式 $\text{ア} \boxed{} = 0$ を得る。これを解くと、 $t = \text{イ} \boxed{}, \text{ウ} \boxed{}$ となる。したがって、最初の方程式の解のうち 1 番大きいものは $x = \text{エ} \boxed{}$ である。

(2) 方程式 $x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ を解け。

解説

(1) $x = 0$ は解でないから $x \neq 0$ として、両辺を $x^2 (\neq 0)$ で割ると

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 \text{ であるから}$$

$$(t^2 - 2) - 7t + 14 = 0$$

$$\text{ア } t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$(t - 3)(t - 4) = 0 \quad \therefore t = \text{イ } 3, \text{ ウ } 4 \quad (\text{または } \text{イ } 4, \text{ ウ } 3)$$

(i) $t=3$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(ii) $t=4$ のとき

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{3}$$

(i), (ii)より, 最初の方程式の解のうち1番大きいものは, $x = 2 + \sqrt{3}$

$$(2) \quad x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 1 \text{ とおく}$$

$P(-1) = 0$ であるから, $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$(x+1)(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1) = 0$$

ここで,

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

$x=0$ は解でないから $x \neq 0$ として, 両辺 $x^2 (\neq 0)$ で割って

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

$$\left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right\} \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\right\} = 0$$

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$$

以上より, $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

補足 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ のように係数が対称に並ぶ方程式を相反方程式という。

注 5次の相反方程式は, 係数が同じ項の次数の偶奇が異なるので, 必ず -1 を解にもつ。また, $x+1$ と積を作る4次式は, 必ず4次の相反型の多項式になる。すぐに確認できるので, 各自確認してみる。

(2) 因数定理を利用する高次方程式の解法

因数定理を使うと、高次方程式が簡単に解ける場合がある。

例5

(1) 3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$ を解け。

(2) 方程式 $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ を解け。

(3) 方程式 $x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ を解け。

(4) $2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ の実数解をすべて求めよ。

(解説)

(1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ とおくと

$P(-1) = 0$ より $P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ

$$P(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 4)$$

$P(x) = 0$ より

$$x+1=0 \text{ または } x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\therefore x = -1, -1 \pm \sqrt{5}$$

(2) $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ とおくと

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \text{ より } P(x) \text{ は } 2x-1 \text{ を因数にもつ}$$

$$P(x) = (2x-1)(x^2 + x + 1)$$

$P(x) = 0$ より

$$x = \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(3) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$ とおくと

$P(1) = 0, P(-1) = 0$ より $P(x)$ は $(x+1)(x-1)$ で割り切れる

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2 + x - 1)$$

$P(x) = 0$ の解は

$$x = \pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(4) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2$ とすると

$P(-1) = 0$ より

$$P(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 + 2x - 2)$$

$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ より}$$

$$Q(x) = (2x-1)(x^2+2x+2)$$

よって

$$P(x) = (x+1)(2x-1)(x^2+2x+2)$$

$x^2+2x+2=0$ の判別式を D とすると, $\frac{D}{4} = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1 < 0$ より

$P(x)=0$ の実数解は, $x=-1, \frac{1}{2}$

(3) 3 次方程式の係数決定問題

3 次方程式の係数決定問題も 2 次方程式の係数決定問題と同様にして, 解を代入して得られる等式から係数を決定する。解が解の公式の形をしている場合には, 少し工夫ができる。

例6

3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + ax + 6 = 0$ の 1 つの解が -1 のとき, 定数 a の値と他の 2 つの解を求めよ。

解説

$x = -1$ を解にもつから

$$-1 - 4 - a + 6 = 0 \quad \therefore a = 1$$

このとき

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x+1)(x-2)(x-3) = 0$$

他の解は, $x = 2, 3$

例7

複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) に対し, $a - bi$ を $\overline{z}$ と書くことにする。

(1) 複素数 z, w に対し, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, および $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$ が成立することを示せ。

(2) 係数が実数である z の 3 次多項式 $f(z)$ に対し, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ であることを示せ。

(3) 複素数 α が, 係数が実数である z の 3 次方程式の解であるとき, $\overline{\alpha}$ も同じ方程式の解であることを示せ。

解説

(1) $z = a + bi$, $w = c + di$ (a, b, c, d は実数) とすると

$$z + w = (a + c) + (b + d)i \text{ より}$$

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \text{ より}$$

$$\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\overline{z} \overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\therefore \overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$$

(2) $f(z) = pz^3 + qz^2 + rz + s$ (p, q, r, s は実数) とおくと, (1) より

$$\overline{f(z)} = \overline{pz^3 + qz^2 + rz + s}$$

$$= \overline{pz^3} + \overline{qz^2} + \overline{rz} + \overline{s}$$

$$= \overline{p} \overline{z^3} + \overline{q} \overline{z^2} + \overline{r} \overline{z} + \overline{s}$$

p, q, r, s は実数であるから $\overline{p} = p, \overline{q} = q, \overline{r} = r, \overline{s} = s$,

$$\overline{z^3} = \overline{zzz} = \overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^3, \overline{z^2} = \overline{zz} = \overline{z} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^2 \text{ より}$$

$$\overline{f(z)} = p(\overline{z})^3 + q(\overline{z})^2 + r(\overline{z}) + s = f(\overline{z})$$

(3) $f(\alpha) = 0$ とおくと $\overline{f(\alpha)} = 0$

(2) から $\overline{f(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$ より

$$f(\overline{\alpha}) = 0$$

よって, $f(\alpha) = 0$ のとき $f(\overline{\alpha}) = 0$ であるから,

$\overline{\alpha}$ も同じ方程式の解である

例8

a, b は, 実数とする. x の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ が, $x = 1 + i$ を解にもつとき, a, b の値と残りの解を求めよ.

(解説)

$x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ が $x = 1 + i$ を解にもつから

$$(1 + i)^3 + a(1 + i)^2 + b(1 + i) - 4 = 0$$

$$(b - 6) + (2a + b + 2)i = 0$$

$b - 6, 2a + b + 2$ は実数より

$$b - 6 = 0, 2a + b + 2 = 0 \quad \therefore a = -4, b = 6$$

このとき

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = 0 \quad \therefore x = 2, 1 \pm i$$

残りの解は, $x = 2, 1 - i$

別解

実数係数の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ が $x = 1 + i$ を解にもつから、
 $x = 1 - i$ も解である。

$x = 1 \pm i$ を2解とする2次方程式の1つは $x^2 - 2x + 2 = 0$ より、
 与えられた3次方程式は、定数項にも着目して

$$(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\therefore x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

よって、 $a = -4, b = 6$ ，残りの解は、 $x = 2, 1 - i$

(4) 高次方程式の解の判別

高次方程式の解の判別は、因数分解や置き換えにより1次や2次方程式の問題に帰着させる。それができないときは、2次方程式のときと同じようにグラフを利用する。グラフを利用する方法については、3次以上の関数のグラフを描くことになり、それには微分法を利用することになるので、微分法を学習するときに扱う。

例9

k を実数の定数とする。3次方程式 $x^3 - (k+2)x^2 + (3k+1)x - 2(k+1) = 0$ は k の値に関係ない解 $x = \text{ア}$ をもつ。また、この3次方程式の解がすべて実数である k の値の範囲は イ である。

解説

(ア) $P(x) = x^3 - (k+2)x^2 + (3k+1)x - 2(k+1)$ とおく

$P(2) = 0$ より $P(x) = 0$ は k の値に関わらず $x = 2$ を解にもつ

別解

$$x^3 - (k+2)x^2 + (3k+1)x - 2(k+1)$$

$$= (-x^2 + 3x - 2)k + (x^3 - 2x^2 + x - 2) \quad (k \text{ について整理})$$

$$= -(x-1)(x-2)k + (x^2+1)(x-2)$$

$$= (x-2)(x^2 - kx + k + 1)$$

より、 k の値に関わらず $x = 2$ を解にもつ

(イ) $P(x) = (x-2)(x^2 - kx + k + 1)$ (割り算を行う) より

$x^2 - kx + k + 1 = 0$ が実数解をもてばよいから

判別式を D として、 $D \geq 0$ より

$$k^2 - 4(k+1) \geq 0$$

$$k^2 - 4k - 4 \geq 0 \quad \therefore k \leq 2 - 2\sqrt{2}, k \geq 2 + 2\sqrt{2}$$

例10

3 次方程式 $x^3 + (a+2)x^2 - 4a = 0$ がちょうど 2 つの実数解をもつような実数 a をすべて求めよ。

(解説)

$$P(x) = x^3 + (a+2)x^2 - 4a \text{ とおくと}$$

$$P(-2) = 0 \text{ より}$$

$$P(x) = (x+2)(x^2 + ax - 2a)$$

$P(x) = 0$ がちょうど 2 つの実数解をもつとき

(i) $x^2 + ax - 2a = 0$ が $x = -2$ を解をもつ

$x^2 + ax - 2a = 0$ が $x = -2$ 以外の解ももてばよい

$$4 - 4a = 0 \quad \therefore a = 1$$

このとき $x^2 + x - 2 = 0$ となり, $x = -2$ 以外の解ももつので

$P(x) = 0$ はちょうど 2 つの実数解をもつ

(ii) $x^2 + ax - 2a = 0$ が $x = -2$ を解をもたないとき

$x^2 + ax - 2a = 0$ が $x = -2$ 以外の重解をもてばよいから

判別式を D として, $D = 0$ より

$$a^2 + 8a = 0$$

$$a(a+8) = 0 \quad \therefore a = 0, -8$$

このとき, 重解はそれぞれ $x = 0, 4$ となるので適する

(i), (ii)より, $a = 0, 1, -8$

例11

a を実数とする. 方程式 $x^4 + ax^2 + 1 = 0$ が実数解をもたないための a の条件を求めよ.

(解説)

$$x^4 + ax^2 + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 = X \text{ とおくと}$$

$$X^2 + aX + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

②の判別式を D とすると

①が実数解をもたないのは, 次の(i), (ii)のいずれか

(i) ②が虚数解をもつとき

$$D = a^2 - 4 < 0 \text{ から } -2 < a < 2$$

(ii) ②の解がすべて負のとき

$$D \geq 0, 2 \text{ 解の和 } -a < 0, 2 \text{ 解の積 } 1 > 0 \text{ (解と係数の関係より)}$$

$$a \leq -2, 2 \leq a, a > 0 \quad \therefore 2 \leq a$$

(i), (ii)より, $a > -2$

補1

(1) a, b, c, d は有理数である. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が $p+q\sqrt{2}$ (p, q は有理数) を解にもつとき, $p-q\sqrt{2}$ も解となることを示せ.

(2) 3 次の項の係数が 1, 他の項の係数が有理数である 3 次方程式 $f(x)=0$ について, $f(x)=0$ の 1 つの解は $1+\sqrt{2}$ であり, $f(1)=1$ である. この 3 次方程式 $f(x)=0$ を求めよ.

解説

(1) $p+q\sqrt{2}$ を解にもつから

$$a(p+q\sqrt{2})^3+b(p+q\sqrt{2})^2+c(p+q\sqrt{2})+d=0$$

$$ap^3+6apq^2+bp^2+2bq^2+cp+d+(3ap^2q+2aq^3+2bpq+cq)\sqrt{2}=0$$

$A=ap^3+6apq^2+bp^2+2bq^2+cp+d$, $B=3ap^2q+2aq^3+2bpq+cq$ とおくと A, B は有理数より

$$A=B=0$$

方程式に $x=p-q\sqrt{2}$ を代入すると,
上の計算で q の代わりに $-q$ において

$$A-B\sqrt{2}=0-0\cdot\sqrt{2}=0$$

よって, $x=p-q\sqrt{2}$ も解となる

(2) $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ とする

$f(x)=0$ は $1+\sqrt{2}$ を解にもつから, (1) より $1-\sqrt{2}$ も解にもつ

$x=1\pm\sqrt{2}$ を 2 解とする 2 次方程式の 1 つは $x^2-2x-1=0$ より

$f(x)$ は x^2-2x-1 を因数としてもつ

$x^3+bx^2+cx+d=(x^2-2x-1)(x-\alpha)$ とおくと

$$b=-\alpha-2, c=2\alpha-1, d=\alpha$$

$$f(1)=1 \text{ より } 1+b+c+d=1$$

$$\text{これを解いて, } \alpha=\frac{3}{2}, b=-\frac{7}{2}, c=2, d=\frac{3}{2}$$

$$\text{よって, } x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=0$$

㊦(1)で, p, q が有理数のとき, $p+q\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow p=0, q=0$ という定理を用いている。この証明は, 集合と論理のところで扱う。

補2

方程式 $x^3 - 4x^2 + px + q = 0$ が $1 + \sqrt{3}$ を 1 つの解にもつ. 次の各問いに答えよ. ただし, p, q は有理数とする.

- (1) p, q の値を求めよ.
 (2) 他の 2 つの解を求めよ.

解説

- (1) $1 + \sqrt{3}$ を解にもつから

$$(1 + \sqrt{3})^3 - 4(1 + \sqrt{3})^2 + p(1 + \sqrt{3}) + q = 0$$

$$(p + q - 6) + (p - 2)\sqrt{3} = 0$$

$p + q - 6, p - 2$ は有理数より

$$p + q - 6 = 0, p - 2 = 0 \quad \therefore p = 2, q = 4$$

- (2) (1) より

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 2, 1 \pm \sqrt{3}$$

したがって, 他の 2 つの解は, $2, 1 - \sqrt{3}$

別解

有理数係数の方程式 $x^3 - 4x^2 + px + q = 0$ が $1 + \sqrt{3}$ を解にもつから, $1 - \sqrt{3}$ も解にもつ

$x = 1 \pm \sqrt{3}$ を 2 解にもつ 2 次方程式の 1 つは $x^2 - 2x - 2 = 0$ より

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + px + q &= (x^2 - 2x - 2)(x - \alpha) \\ &= x^3 - (\alpha + 2)x^2 + (2\alpha - 2)x + 2\alpha = 0 \end{aligned}$$

これが x についての恒等式より

$$\alpha + 2 = 4, 2\alpha - 2 = p, 2\alpha = q \quad \therefore \alpha = 2, p = 2, q = 4$$

補3

a, b, c は整数とする. 4 次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = 0$ の実数解が 1 と 3 となるような a の最大値は $\boxed{}$ で, 最小値は $\boxed{}$ である.

解説

1 と 3 が解であるから,

$$a + b + c = -4 \cdots \textcircled{1}$$

$$9a + 3b + c = -28 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より, } 8a + 2b = -24 \quad \therefore b = -4a - 12 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } a + (-4a - 12) + c = -4 \quad \therefore c = 3a + 8 \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ を与えられた4次方程式に代入すると

$$x^4 + ax^3 - 4(a+3)x^2 + (3a+8)x + 3 = 0$$

ここで、与えられた4次方程式は $x=1, 3$ を解にもつから、この式の左辺は $x-1, x-3$ を因数にもつので

$$(x-1)(x-3)\{x^2 + (a+4)x + 1\} = 0 \dots \textcircled{5}$$

4次方程式 $\textcircled{5}$ の実数解が1と3となるのは、

$$2 \text{ 次方程式 } x^2 + (a+4)x + 1 = 0 \dots \textcircled{6}$$

が次の(i)~(iii)のいずれかを満たすときである

(i) $x=1$ を解にもつ

2次方程式 $\textcircled{6}$ に $x=1$ を代入して

$$1^2 + (a+4) \cdot 1 + 1 = 0 \quad \therefore a = -6$$

このとき、 $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から b, c も整数となり、4次方程式 $\textcircled{5}$ は

$$(x-1)(x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x-1)^3(x-3) = 0$$

よって、4次方程式 $\textcircled{5}$ の実数解は1と3となる

(ii) $x=3$ を解にもつ

2次方程式 $\textcircled{6}$ に $x=3$ を代入して

$$3^2 + (a+4) \cdot 3 + 1 = 0 \quad \therefore a = -\frac{22}{3}$$

a は整数であるから、不適

(iii) 虚数解をもつ

2次方程式 $\textcircled{6}$ の判別式を D とすると

$$D = (a+4)^2 - 4 = a^2 + 8a + 12 = (a+2)(a+6)$$

2次方程式 $\textcircled{6}$ が虚数解をもつとき、 $D < 0$ より

$$(a+2)(a+6) < 0$$

$$-6 < a < -2$$

これを満たす整数 a の値は、 $a = -5, -4, -3$

これらのとき、 $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ から b, c も整数となる

(i)~(iii)より、 a のとりうる値は、 $a = -6, -5, -4, -3$

よって、 a の最大値は $\textcircled{7}-3$ 、最小値は $\textcircled{1}-6$

補4

x の 4 次方程式 $(x^2+ax+1)(x^2+x+a)=0$ (a は実数の定数) …… (*)
 について, 次の問いに答えよ。

- (1) $a=2$ のとき, (*) の解をすべて求めよ。
- (2) (*) の実数解の個数が 0 となるとき, a の値の範囲を求めよ。
- (3) (*) の異なる実数解の個数は 3 となることを示せ。

解説

- (1) $a=2$ のとき

$$(x^2+2x+1)(x^2+x+2)=0$$

$$(x+1)^2(x^2+x+2)=0 \quad \therefore x=-1, \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

- (2) $x^2+ax+1=0 \cdots \textcircled{1}$, $x^2+x+a=0 \cdots \textcircled{2}$ の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1=a^2-4, \quad D_2=1-4a$$

- (*) の実数解の個数が 0 となるとき, $D_1 < 0$ かつ $D_2 < 0$ より

$$a^2-4 < 0 \text{ かつ } 1-4a < 0$$

$$-2 < a < 2 \text{ かつ } a > \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{1}{4} < a < 2$$

- (3) (*) の異なる実数解の個数が 3 であるとき,

(i) ~ (iii) のいずれかが成り立つ

- (i) $D_1=0$ かつ $D_2 > 0$

$D_1=0$ より

$$a^2-4=0 \quad \therefore a=\pm 2$$

$a=2$ のとき, (1) より $D_2 < 0$ となり不適

$a=-2$ のとき, ①の重解は $x=1$

②は $x^2+x-2=0 \quad (x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2, 1$ より不適

- (ii) $D_1 > 0$ かつ $D_2=0$

$D_2=0$ より

$$1-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

このとき, $D_1 < 0$ より不適

(iii) $D_1 > 0$ かつ $D_2 > 0$ で, ①, ② が共通の実数解を 1 つだけもつ
 共通解を α とおくと

$$\alpha^2+a\alpha+1=0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha^2 + \alpha + a = 0 \cdots \textcircled{4}$$

③－④より

$$a\alpha + 1 - \alpha - a = 0$$

$$(a-1)(\alpha-1) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ または } \alpha=1$$

$a=1$ のとき, $D_1 < 0$ より不適

$\alpha=1$ のとき $a=-2$

$a=-2$ のとき, (i)より不適

(i)～(iii)より, (*) の異なる実数解の個数が 3 となることはない

補5

定数 a は実数であるとする。方程式 $(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$ を満たす実数 x はいくつあるか。 a の値によって分類せよ。

解説

$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0 \cdots (*)$ とする

(*)より

$$x^2 + ax + 1 = 0 \cdots \textcircled{1} \text{ または } 3x^2 + ax - 3 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = a^2 - 4 = (a+2)(a-2), \quad D_2 = a^2 + 36 > 0$$

よって, ①を満たす実数 x の個数は

$|a| < 2$ のとき 0 個, $|a| = 2$ のとき 1 個, $2 < |a|$ のとき 2 個

②を満たす実数 x の個数は常に 2 個である。

ここで ①, ② が共通解 $x = \alpha$ をもつとすると

$$\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}', \quad 3\alpha^2 + a\alpha - 3 = 0 \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{2}' - \textcircled{1}' \text{ より, } \alpha^2 = 2 \quad \therefore \alpha = \pm\sqrt{2}$$

(i) $\alpha = \sqrt{2}$ のとき

$$\textcircled{1}' \text{ より, } 3 + \sqrt{2}a = 0 \quad \therefore a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

このとき, ①, ② の残りの解は解と係数の関係より

$$\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \text{ すなわち } \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $\alpha = -\sqrt{2}$ のとき

$$\textcircled{1}' \text{ より, } 3 - \sqrt{2}a = 0 \quad \therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

このとき、①、②の残りの解は解と係数の関係より

$$\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}, \text{すなわち } -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

以上より、方程式(*)を満たす実数 x の個数は

$|a| < 2$ のとき 2 個, $|a| = 2$ のとき 3 個, $2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 4 個,

$|a| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個, $\frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$ のとき 4 個

補6

x の 4 次方程式 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0$ ……(*) について、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) $x + \frac{1}{x} = t$ とおくとき、(*) を t の方程式として表せ。
- (2) $a = 3$ のとき、(*) の解を求めよ。
- (3) (*) が異なる 4 個の実数解をもつとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

解説

- (1) $x = 0$ は解でないから、(*) の両辺を x^2 で割って

$$x^2 + 2x + a + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ とおくと, } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2 \text{ より}$$

$$(t^2 - 2) + 2t + a = 0$$

$$\therefore t^2 + 2t - 2 + a = 0$$

- (2) $a = 3$ のとき

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$(t + 1)^2 = 0 \quad \therefore t = -1$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ より}$$

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3) t^2 + 2t - 2 + a = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$-t^2 - 2t + 2 = a \text{ (定数分離)}$$

①を満たす t の個数は、 $y = -t^2 - 2t + 2 = -(t+1)^2 + 3$ と $y = a$ の共有点の個数に等しい

また、 $x + \frac{1}{x} = t$ ，すなわち $x^2 - tx + 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$D = t^2 - 4$ であるから、1つの t に対して

$D > 0$ ，すなわち $t < -2, t > 2$ のとき、2つの実数 x が対応し、

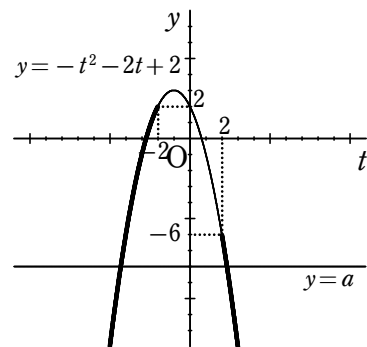
$D = 0$ ，すなわち $t = \pm 2$ のとき、1つの実数 x が対応し、

$D < 0$ ，すなわち $-2 < t < 2$ のとき、実数 x は対応しない

ことに注意して、(*) が異なる 4 個の実数解をもつのは、グラフより

$$a < -6$$

($y = -t^2 - 2t + 2$ と $y = a$ が $t < -2, t > 2$ において 2 点で交わるような a の範囲を求めればよい。)



発展 3 次方程式, 4 次方程式の解の公式

一般に 3 次方程式, 4 次方程式は代数的に解けることが知られてる。つまり, 3 次方程式や 4 次方程式にも解の公式が存在するということである。これらの解の公式は, かなり複雑な形になるため, 高校では扱われない。しかし, これらを題材とした問題が, 大学入試ではしばしば出題される。3 次方程式に関してはカルダノの方法, 4 次方程式に関してはフェラーリの方法, についての問題について考える。一般的な方法は, 興味があればインターネットなどで調べてみるとよい。なお, 一般的に 5 次以上の方程式は, 代数的には解けないことが知られている。

例1 (3 次方程式の解法 カルダノの方法)

(1) すべての実数 x, y, z に対して次の等式が成り立つような実数の組 (a, b) を 1 組求めよ。

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ = (x + y + z)\{x + (a + bi)y + (a - bi)z\}\{x + (a - bi)y + (a + bi)z\} \end{aligned}$$

ただし, i は虚数単位とする。

(2) $y^3 + z^3 = 91, yz = 12$ を満たす整数の組 (y, z) を 1 組求めよ。

(3) 3 次方程式 $x^3 - 36x + 91 = 0$ の解をすべて求めよ。

解説

(1) $x=1, y=1, z=1$ を代入すると

$$0 = 3(2a + 1)^2 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$x=0, y=0, z=1$ を代入すると

$$1 = a^2 + b^2$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ より } b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって, $a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ であることが必要

このとき,

$$\begin{aligned} (x + y + z) \left\{ x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) y + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z \right\} \\ \times \left\{ x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) y + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z \right\} \end{aligned}$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

よって、すべての実数 x, y, z に対して与えられた等式は成り立つ。

したがって、 $(a, b)=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ($(a, b)=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ でもよい)

参考

この $a+bi$ あるいは $a-bi$ は、 $x^3=1$ の虚数解、すなわち ω である。

一方を ω とすれば、他方は $\overline{\omega}=\omega^2$ であり、

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

と因数分解できるということである。

(2) $y^3+z^3=91$ より

$$(y+z)(y^2-yz+z^2)=91$$

$$(y+z)\{(y+z)^2-3yz\}=91$$

$yz=12$ より

$$(y+z)\{(y+z)^2-36\}=91$$

$91=1\cdot 91=7\cdot 13$ かつ $y+z$ は整数より

$$y+z=7$$

y, z を解とする 2 次方程式の 1 つは $t^2-7t+12=0$ より

$$(y, z)=(3, 4) \quad ((y, z)=(4, 3) \text{ でもよい})$$

(3) (1) の等式において、 $y=3, z=4$ とすると

$$\begin{aligned} x^3-36x+91 &= (x+7)\left\{x+3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\} \\ &\quad \times \left\{x+3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\} \\ &= (x+7)\left(x-\frac{7+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{3}i}{2}\right) \end{aligned}$$

よって、求める解は $x=-7, \frac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$

カルダノの方法も、フェラーリの方法も、まずは、3 次方程式、4 次方程式 $P(x)=0$ の $P(x)$ を平行移動して、それぞれ x^2, x^3 の項の係数を 0 にする。平行移動を利用すると、簡単に解ける場合がある。

例2 (平行移動)

関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1$ について、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフを表す関数を $y = g(x)$ とする。 $g(x)$ を x の式で表せ。

(2) 4 次方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

(解説)

(1) $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフを表す関数は $y = f(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) \\ &= (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 4(x+1) - 1 \\ &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) - 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1) \\ &\quad + 4(x+1) - 1 \\ &= x^4 - 4x^2 + 2 \end{aligned}$$

(2) $g(x) = 0$ の解を α とすると、 $f(x) = 0$ の解は $1 + \alpha$

$g(x) = 0$ より

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= 2 + \sqrt{2}, \quad 2 - \sqrt{2} \\ \therefore x &= \pm\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \pm\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって、 $f(x) = 0$ の解は

$$x = 1 \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad 1 \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

例3 (4 次方程式の解法 フェラーリの方法)

$f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 8$ とする。

(1) $(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$ が x の恒等式となるような、整数 t, p, q の値を 1 組求めよ。

(2) (1) で求めた t, p, q の値を用いて方程式 $(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$ を解くことにより、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

(解説)

$$\begin{aligned} (1) (x^2 + t)^2 - f(x) &= x^4 + 2tx^2 + t^2 - (x^4 + 2x^2 - 4x + 8) \\ &= 2(t-1)x^2 + 4x + t^2 - 8 \end{aligned}$$

$(px + q)^2 = p^2x^2 + 2pqx + q^2$ より、

$$2(t-1)x^2 + 4x + t^2 - 8 = p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

これが x についての恒等式より

$$2(t-1)=p^2 \dots \textcircled{1}, \quad 4=2pq \dots \textcircled{2}, \quad t^2-8=q^2 \dots \textcircled{3}$$

$$\therefore pq=2$$

t は整数であるから、 $\textcircled{1}$ の左辺は偶数であり、 p も偶数となるから

$$(p, q)=(2, 1)$$

このとき、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ から $(t, p, q)=(3, 2, 1)$

$((t, p, q)=(3, -2, -1)$ でもよい)

$$(2) (x^2+3)^2=(2x+1)^2 \text{ より}$$

$$x^2+3=\pm(2x+1)$$

(i) $x^2+3=2x+1$ のとき

$$x^2-2x+2=0 \quad \therefore x=1\pm i$$

(ii) $x^2+3=-(2x+1)$ のとき

$$x^2+2x+4=0 \quad \therefore x=-1\pm\sqrt{3}i$$

$f(x)=(x^2+3)^2-(2x+1)^2$ であるから、方程式 $(x^2+3)^2=(2x+1)^2$ の解は、方程式 $f(x)=0$ の解である

よって、求める解は、 $x=1\pm i, -1\pm\sqrt{3}i$