

1.4 置換積分法

(1) 置換積分法

関数 $f(x)$ の不定積分 $y = \int f(x)dx$ において、 x が微分可能な t の関数 $g(t)$ を用いて $x = g(t)$ と表されるとき、 y は t の関数で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

であるから、

$$y = \int f(g(t))g'(t)dt$$

よって、次の置換積分法の公式が得られる。

置換積分法

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \quad \text{ただし, } x = g(t)$$

この公式は、

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$$

と書いてもよい。

定積分では、 x が a から b まで変化すると、 t が α から β まで変化するとき、この関係を右の表のように表し、関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とすると

x	$a \rightarrow b$
t	$\alpha \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \left[F(g(t)) \right]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \end{aligned}$$

よって、定積分に関して、次の置換積分法の公式が成り立つ。

定積分の置換積分法

$\alpha < \beta$ のとき、区間 $[\alpha, \beta]$ で微分可能な関数 $x = g(t)$ に対し、 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt$$

例1

次の積分を計算せよ。

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx$

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

(3) $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}} dx$

解説(1) $\sqrt{x} = t$ とおくと, $x = t^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx &= \int \frac{1}{t(t^2-1)} \cdot 2t dt \\
&= \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \log|t-1| - \log|t+1| + C = \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
&= \log \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x+1} = t$ とおくと, $x = t^2 - 1$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2t dt}{(t^2-1)t} \\
&= \int \frac{2}{t^2-1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \log|t-1| - \log|t+1| + C = \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
&= \log \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

別解 $x+1 = t$ とおいてもよい。(3) $\sqrt{2-\sqrt{x}} = t$ とおくと, $x = (2-t^2)^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2(2-t^2)(-2t) dt = 4(t^2-2)t dt$$

よって

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \int_{\sqrt{2}}^0 t \times 4(t^2 - 2)t dt = -4 \int_0^{\sqrt{2}} (t^4 - 2t^2) dt \\
 &= -4 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{32}{15} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

別解

$t = 2 - \sqrt{x}$ とおくと, $x = (2 - t)^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = -2(2 - t)$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \sqrt{2 - \sqrt{x}} dx &= -2 \int_2^0 \sqrt{t} (2 - t) dt = 2 \int_0^2 \sqrt{t} (2 - t) dt \\
 &= 2 \left[\frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{32}{15} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

例2

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int e^{\sqrt{x}} dx \qquad (2) \int \sin \sqrt{x} dx \qquad (3) \int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx$$

解説

(1) $\sqrt{x} = t$ とおくと, $x = t^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int e^{\sqrt{x}} dx &= \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t e^t dt \\
 &= 2 \left(t e^t - \int e^t dt \right) = 2(t e^t - e^t) + C = 2(t - 1)e^t + C \\
 &= 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x} = t$ とおくと, $x = t^2$ より

$$\frac{dx}{dt} = 2t$$

よって

$$\begin{aligned}
 \int \sin \sqrt{x} dx &= \int \sin t \cdot 2t \cdot dt = 2 \int t \sin t dt \\
 &= 2 \left(-t \cos t + \int \cos t dt \right) = -2t \cos t + 2 \sin t + C
 \end{aligned}$$

$$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$(3) \quad t=1+\sqrt{x} \text{ とおくと, } x=(t-1)^2 \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(t-1)$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline t & 1 \longrightarrow 2 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1+\sqrt{x}) dx &= \int_1^2 (\log t) \cdot 2(t-1) dt \\ &= \int_1^2 (t^2-2t)' \log t dt = \left[(t^2-2t) \log t \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t^2-2t}{t} dt \\ &= \int_1^2 (2-t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 = 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例3

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx$$

$$(2) \int \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos x} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4\cos x + 3} dx$$

解説

$$(1) \quad e^x = t \text{ とおくと, } x = \log t \text{ より}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline t & 1 \longrightarrow e \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 3} dx &= \int_1^e \frac{1}{t + \frac{2}{t} + 3} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt \\ &= \int_1^e \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= \left[\log|t+1| - \log|t+2| \right]_1^e = \log \frac{3(e+1)}{2(e+2)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \cos x = t \text{ とおくと}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{t}{2+t} \cdot (-1) dt = \int \left(\frac{2}{2+t} - 1 \right) dt \\ &= 2 \log |2+t| - t + C \\ &= 2 \log (2 + \cos x) - \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(3) $\cos x = t$ とおくと,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4 \cos x + 3} dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^2 + 4t + 3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(t+1)(t+3)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{t+1}{t+3} \right) \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{2} - \log \frac{3}{7} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{7}{6}\end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$1 \rightarrow \frac{1}{2}$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) に対して, $x = a \sin \theta$ とおくと根号がとれるから,
 $\sqrt{a^2 - x^2}$ を含む積分では, $x = a \sin \theta$ とおくとよい。

〔注〕 $x = a \cos \theta$ とおいてもよい。

例4

次の積分を計算せよ。

- | | |
|---|---|
| <p>(1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$</p> <p>(3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$</p> | <p>(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) \sqrt{1-2x^2} dx$</p> <p>(4) $\int_0^3 \sqrt{6x-x^2} dx$ を</p> |
|---|---|

解説

(1) $x = \sin \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

よって

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ で } \cos \theta \geq 0)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

別解

$y = \sqrt{1 - x^2}$ は

$y^2 = 1 - x^2, y \geq 0$ であるから,

円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分を表す。

よって, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は, $0 \leq x \leq 1$ において,

この円の上半分と x 軸とで囲まれる部分の面積を表すから

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) \sqrt{1 - 2x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \sqrt{1 - 2x^2} dx + \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} dx$$

ここで

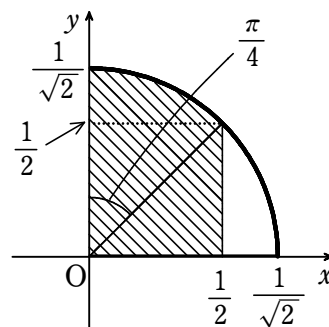
$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \sqrt{1 - 2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x^2)' \cdot (1 - 2x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{6}$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} dx$ は右図の斜線部分の面積に等しいから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$



よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}dx &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{1}{6}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{\pi}{16}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{16}\pi\end{aligned}$$

(3) $x = \sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta} \cdot \sqrt{2}\cos\theta d\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ で } \cos\theta > 0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{6x-x^2} = \sqrt{9-(x-3)^2}$

$x-3 = 3\sin\theta$ とおくと, $x = 3\sin\theta + 3$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta$$

x	$0 \rightarrow 3$
θ	$\frac{3}{2}\pi \rightarrow 2\pi$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{6x-x^2} dx &= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sqrt{9-9\sin^2\theta} \cdot 3\cos\theta d\theta \\ &= 9 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cos\theta d\theta \\ &= 9 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = 9 \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = \frac{9}{4}\pi\end{aligned}$$

別解

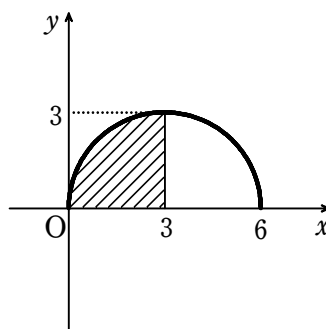
$$y = \sqrt{6x - x^2} \text{ は}$$

$$y^2 = 6x - x^2, y \geq 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0, y \geq 0$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9, y \geq 0$$

これは、中心 $(3, 0)$ 、半径 3 の円の
 $y \geq 0$ の部分を表す



$$\int_0^3 \sqrt{6x - x^2} dx \text{ は、 } 0 \leq x \leq 3 \text{ において、}$$

この円の上半分と x 軸とで囲まれる部分の面積を表すから

$$\int_0^3 \sqrt{6x - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4} \pi$$

$a^2 + x^2 (a > 0)$ に対して、 $x = a \tan \theta$ とおくと

$$a^2 + a^2 \tan^2 \theta = a^2 (1 + \tan^2 \theta) = \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \text{ であることと } \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$$

であることから、 $a^2 + x^2$ を含む積分では、 $x = a \tan \theta$ とおくとよい。

例5

次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)^2}$$

$$(3) \int_0^a \log(a^2 + x^2) dx \text{ (} a \text{ は正の定数)} \quad (4) \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx$$

解法

(1) $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $x = \sqrt{3} \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\{3(1+\tan^2 \theta)\}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{3}}{9} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{18} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{108} \pi + \frac{1}{24} \end{aligned}$$

(3) $I = \int_0^a \log(a^2 + x^2) dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \left[x \log(a^2 + x^2) \right]_0^a - \int_0^a \frac{2x^2}{a^2 + x^2} dx \\ &= a \log 2a^2 - 2 \int_0^a \left(1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2} \right) dx \\ &= a \log 2a^2 - 2a + 2a^2 \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx \end{aligned}$$

ここで, $x = a \tan \theta$ とおくと

$$dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \times \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

したがって

$$I = a \log 2a^2 - 2a + \frac{\pi}{2} a$$

$$(4) \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

ここで

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{6}$

x	$0 \rightarrow a$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} dx = \left[\log(x^2+x+1) \right]_0^1 = \log 3$$

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ であるから}$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \text{ とおくと } x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \text{ より}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

よって

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \log 3 + \left[\frac{2}{3} \sqrt{3} \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

したがって

$$(\text{与式}) = \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

例6

不定積分 $I = \int \sqrt{1+x^2} dx$ を, $\sqrt{1+x^2} + x = t$ とおいて求めよ。

解説

$$\sqrt{1+x^2} + x = t \text{ とおくと,}$$

$$(t = \sqrt{1+x^2} + x \geq \sqrt{1+x^2} - |x| = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{x^2} > 0 \quad (-|x| < x < |x|))$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - x$$

$$1+x^2 = (t-x)^2, t-x \geq 0$$

$$1 = t^2 - 2tx, t \geq x$$

$$2tx = t^2 - 1, t \geq x$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

$t \geq x$ より

$$t \geq \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \quad \therefore t + \frac{1}{t} \geq 0$$

このとき,

$$y = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2\log|t| - \frac{1}{2t^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2} \log|t| \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{1+x^2} + x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

【注】

$y = \sqrt{1+x^2}$ は

$y^2 = 1+x^2, y \geq 0$ であるから,

双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ の $y \geq 0$ の部分を表す。

$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ はこの双曲線の媒介変数表示であり,

$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ を逆に t について解けば, $\sqrt{1+x^2} + x = t$ となるので,

このような置換を行っている。

ちなみに $y = \sqrt{1-x^2}$ の積分において, $x = \sin \theta$ とおくのは,

円 $x^2 + y^2 = 1$ の媒介変数表示が $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ となるからである。

本来は $x = \cos \theta$ とおくべきであるが, $x = \sin \theta$ とおいてもあまり変わらない。

例7

以下の設問に答えよ。ただし, 対数は自然対数である。

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ のとき, $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = 2 \left[\log(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 = 2 \log(1 + \sqrt{2}) \text{ (偶関数より)}$$

例8

$\tan \frac{\theta}{2} = x$ とおくとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ を x で表すと

$$\sin \theta = \text{ア} \boxed{}, \quad \cos \theta = \text{イ} \boxed{}$$

$$\text{これらを利用すると } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} = \text{ウ} \boxed{}$$

解説

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \tan \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$x = \tan \frac{\theta}{2} \text{ より}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{1 + x^2}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2}{1 + x^2}$$

θ	0	→	$\frac{\pi}{2}$
x	0	→	1

よって

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^1 \frac{1+x^2}{2(1+x)} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\ &= \left[\log |1+x| \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

例9

次の定積分を計算せよ.

$$(1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{dx}{\sin x}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

解説

$$(1) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x}$$

$\cos x = t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = -\frac{1}{\sin x}$$

よって

$$\text{与式} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{-dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\log|1-t| + \log|1+t| \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\log(\sqrt{2} + 1)$$

x	$\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{3}{4}\pi$
t	$\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}$

別解

$t = \tan \frac{x}{2}$ とおいてもできる。ただし、 $\tan \frac{\pi}{8}, \tan \frac{3\pi}{8}$ を求めなければならぬので、面倒である。

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$$

$\sin x = t$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\cos x}$$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\&= \frac{1}{2} \left[\log|1+t| - \log|1-t| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\&= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log(\sqrt{2} + 1)\end{aligned}$$

補1

(1) 合成関数の導関数の公式から置換積分の公式を，積の導関数の公式から部分積分の公式をそれぞれ導け.

(2) 置換積分を使って求められる積分の具体例と，部分積分を使って求められる積分の具体例をそれぞれ1つずつ挙げ，その計算を書け.

解説

(1) 置換積分について

$$\int f(x) dx = F(x), x = g(t) \text{ とおくと, } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

合成関数の微分から，

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot g'(t) = f(g(t)) g'(t) \text{ より}$$

$$F(x) = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

よって， $x = g(t)$ のとき

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

部分積分について

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ より}$$

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

$$\therefore \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

(2) 置換積分の例

$$x+1=t \text{ とおくと, } x=t-1, \frac{dx}{dt}=1 \text{ より}$$

$$\int (x+1)^2 dx = \int t^2 \times 1 \cdot dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

部分積分の例

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

補2

定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \\ \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_0^2 \frac{(x^2+4)'}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[2\sqrt{x^2+4} \right]_0^2 = 4\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

$x=2\tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \rightarrow 2$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}} \cdot \frac{2}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\sin\theta = u$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{\frac{du}{d\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$
u	$0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって, $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{(1+u)(1-u)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \frac{1+u}{1-u} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \log(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx = 4\sqrt{2} - 4 + \log(\sqrt{2}+1)$$

補3

3つの定積分

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx, \quad J = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad K = \int_0^2 \frac{4+x-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

の値を求めると、 $I = \text{ア}$, $J = \text{イ}$, $K = \text{ウ}$ となる。

解説

$y = \sqrt{4-x^2}$ は

$y^2 = 4 - x^2, y \geq 0$ であるから、

円 $x^2 + y^2 = 4$ の $y \geq 0$ の部分を表す

よって、 $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ は、 $0 \leq x \leq 2$ において、

この円の上半分と x 軸とで囲まれる部分の面積を表すから

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} (4-x^2)' dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[2\sqrt{4-x^2} \right]_0^2 = 2 \end{aligned}$$

よって

$$K = \int_0^2 \frac{4+x-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = I + J = \text{ウ} \pi + 2$$

補4

定積分 $I = \int_0^1 \frac{3x^4 + 8x^3}{x^2 + 1} dx$ について

(1) 整式 $3x^4 + 8x^3$ を整式 $x^2 + 1$ で割った商と余りを求めよ。

(2) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ を求めよ。

(3) I を求めよ。

解説

(1)

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 8x - 3 \\
 x^2 + 1 \overline{) 3x^4 + 8x^3} \\
 \underline{3x^4 } \\
 8x^3 - 3x^2 \\
 \underline{8x^3 } \\
 -3x^2 - 8x \\
 \underline{-3x^2 } \\
 -8x + 3
 \end{array}$$

よって、商は $3x^2 + 8x - 3$ 、余りは $-8x + 3$

$$(2) \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left[\log(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \text{ について}$$

$$x = \tan \theta \text{ とおくと, } dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \text{ より}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

(3) (1), (2)より

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{3x^4 + 8x^3}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(3x^2 + 8x - 3 - \frac{8x}{x^2 + 1} + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx \\
 &= \left[x^3 + 4x^2 - 3x \right]_0^1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \log 2 + 3 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - 4 \log 2 + \frac{3}{4} \pi
 \end{aligned}$$

補5

$\frac{1}{(1-t^2)^2}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{\text{ア} \boxed{}}{(1-t)^2} + \frac{\text{イ} \boxed{}}{1-t} + \frac{\text{ウ} \boxed{}}{(1+t)^2} + \frac{\text{エ} \boxed{}}{1+t} \text{ となる.}$$

また, 積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$ の値は $\text{オ} \boxed{} + \frac{1}{2} \log(\text{カ} \boxed{})$ である.

(解説)

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{a}{(1-t)^2} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{(1+t)^2} + \frac{d}{1+t} \text{ とおくと}$$

$$1 = a(1+t)^2 + b(1+t)^2(1-t) + c(1-t)^2 + d(1+t)(1-t)^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 = (d-b)t^3 + (a-b+c-d)t^2 + (2a+b-2c-d)t + a+b+c+d$$

これが t についての恒等式より

$$d-b=0, a-b+c-d=0, 2a+b-2c-d=0, a+b+c+d=1$$

$$\therefore a=b=c=d=\frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2} dx$$

$$\sin x = t \text{ とおくと, } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\cos x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} \right\} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-t} - \log(1-t) - \frac{1}{1+t} + \log(1+t) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} - 1 + 0 + 1 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (2+\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2}) + \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right\} = \text{オ} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(\text{カ} \sqrt{2}+1) \end{aligned}$$