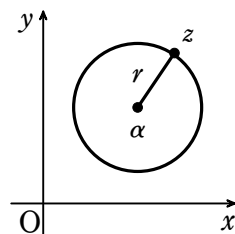


## 1.4 複素数平面上の軌跡

### (1) 複素数平面上の円

$r$  を正の実数とする。点  $\alpha$  を中心とする半径  $r$  の円は次の方程式を満たす点  $z$  全体である。

$$|z - \alpha| = r$$



### 例1

(1) 複素数  $z$  が  $|z - 3 - 4i| = 3$  を満たしているとき、 $|z|$  の最大値は

$\text{ }^{\text{ア}}$  , 最小値は  $\text{ }^{\text{イ}}$   である。ただし、 $i^2 = -1$  とする。

(2) 複素数  $z$  が  $|z| = 1$  を満たすとき、 $|z + 1 - 2i|$  の最大値は  である。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。

### 解説

(1)  $|z - 3 - 4i| = 3$  より

$$|z - (3 + 4i)| = 3$$

よって、点  $z$  の全体は

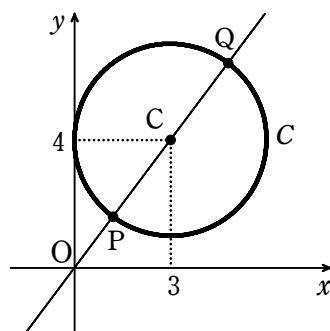
点  $C(3 + 4i)$  を中心とする半径 3 の円  $C$

原点  $O$  と点  $C$  を結ぶ直線と円  $C$  の交点のうち、

原点に近い方を  $P$ 、遠い方を  $Q$  とすると、

$|z|$  の最大値は、 $OQ = OC + CQ = 5 + 3 = \text{ }^{\text{ア}}8$

最小値は、 $OP = OC - CP = 5 - 3 = \text{ }^{\text{イ}}2$



(2)  $|z| = 1$  を満たすとき、点  $z$  は

原点  $O$  を中心とする半径 1 の円周上を動く

$|z + 1 - 2i| = |z - (-1 + 2i)|$  より

$P(z)$ ,  $A(-1 + 2i)$  とすると

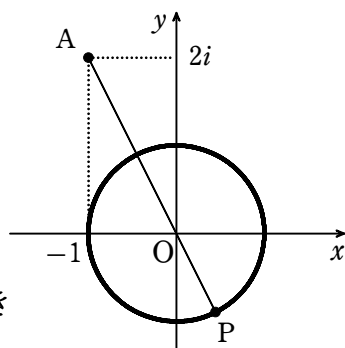
$|z + 1 - 2i|$  は距離  $AP$  を表す

$AP$  が最大となるのは、右図のように

3 点  $A$ ,  $O$ ,  $P$  がこの順番で一直線上にあるとき

$AO = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$ ,  $OP = 1$  より

$|z + 1 - 2i|$  の最大値は、 $AO + OP = 1 + \sqrt{5}$



$$|z - \alpha| = r \text{ は,}$$

$$|z - \alpha|^2 = r^2$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

$$z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 - r^2 = 0$$

と変形できる。

したがって、これも円の方程式であることが分かる。

## (2) 垂直二等分線・アポロニウスの円

異なる 2 点からの距離の比が一定である点の集合は、直線か円であることはすでに学んでいる。これを複素数平面上で考える。

### 例2

(1)  $|z + 3| = |z + 1|$  を満たす複素数  $z$  の全体は、複素数平面上でどんな図形を描くかを調べ、図示せよ。

(2)  $|z - 2| = 2|z + 1|$  を満たす複素数  $z$  の全体は、複素数平面上でどんな図形を描くかを調べ、図示せよ。

(3)  $|z + 3| = |z + 1| = \frac{|z - 2|}{2}$  を満たす複素数  $z$  を求めよ。

#### 解説

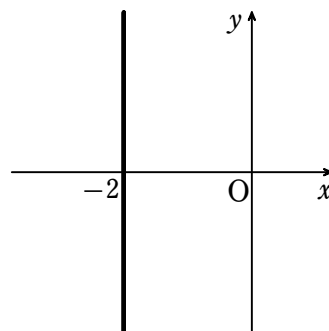
(1)  $|z + 3| = |z + 1|$  より

$$(z + 3)(\bar{z} + 3) = (z + 1)(\bar{z} + 1)$$

$$\therefore z + \bar{z} = -2$$

よって、 $\operatorname{Re} z = -1$  より、

$z$  は右図のような直線を描く



#### 別解

A(-3), B(-1) とすると

点  $z$  は点 A と点 B から等距離の図形  $l$  上を動く

よって、図形  $l$  は点 A と点 B を結ぶ線分の垂直二等分線になる

$$(2) |z-2|=2|z+1| \text{ より}$$

$$|z-2|^2=4|z+1|^2$$

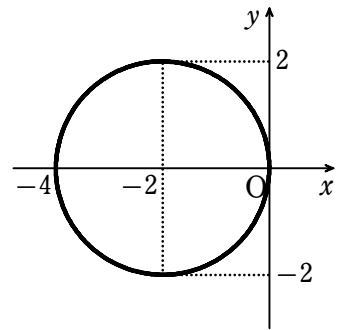
$$(z-2)(\bar{z}-2)=4(z+1)(\bar{z}+1)$$

$$z\bar{z}+2(z+\bar{z})=0$$

$$(z+2)(\bar{z}+2)=4$$

$$\therefore |z+2|=2$$

よって、点  $z$  は点  $(-2)$  を中心とする  
半径 2 の円を表すから、右図のようになる



**別解**

アポロニウスの円を利用してもよい。

(3) 条件より

$$|z+3|=|z+1| \text{ かつ } |z-2|=2|z+1|$$

よって、 $z$  は(1), (2)のグラフの交点を表す複素数より

$$z = -2+2i, -2-2i$$

**例3**

$i$  を虚数単位とする。複素数  $z$  が等式  $|iz+3|=|2z-6|$  を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) この等式を満たす点  $z$  全体は、どのような図形を表すか答えよ。

(2)  $z-\bar{z}=0$  を満たす  $z$  を求めよ。

(3)  $|z+i|$  の最大値を求めよ。

**解説**

$$(1) |iz+3|=|2z-6| \text{ より}$$

$$|iz+3|^2=|2z-6|^2$$

$$(iz+3)(\overline{iz+3})=(2z-6)(\overline{2z-6})$$

$$(iz+3)(-i\bar{z}+3)=(2z-6)(2\bar{z}-6)$$

$$z\bar{z}+3iz-3i\bar{z}+9=4z\bar{z}-12z-12\bar{z}+36$$

$$z\bar{z}-(4+i)z-(4-i)\bar{z}+9=0$$

$$\{z-(4-i)\}(\bar{z}-(4+i))=8 \dots \textcircled{1}$$

$$\{z-(4-i)\}(\overline{z-(4-i)})=8$$

$$|z-(4-i)|^2=8$$

$$\therefore |z-(4-i)|=2\sqrt{2}$$

よって、点  $z$  全体は、中心が点  $4-i$ 、半径が  $2\sqrt{2}$  の円を表す

**別解**

$$|iz + 3| = |2z - 6| \text{ より}$$

$$|i(z - 3i)| = 2|z - 3|$$

$$\therefore |z - 3i| = 2|z - 3|$$

として、アポロニウスの円を利用

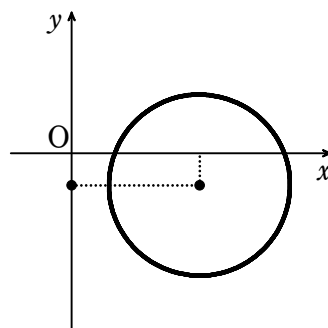
$$(2) \ z - \bar{z} = 0 \text{ より, } z = \bar{z}$$

①より

$$\{z - (4 - i)\}\{z - (4 + i)\} = 8$$

$$z^2 - 8z + 9 = 0$$

$$\therefore z = 4 \pm \sqrt{7}$$



(3) (1)より、等式を満たす点  $z$  全体を図示すると右図のようになる

$$|z + i| = |z - (-i)| \text{ より,}$$

$|z + i|$  は点  $-i$  と右図の円上の点との距離を表す

$|z + i|$  が最大になるのは、

3点  $-i$ ,  $4 - i$ ,  $z$  がこの順に一直線上に並ぶとき

よって、求める最大値は  $4 + 2\sqrt{2}$

**例4**

複素数平面上に、2つの不等式  $|z - (1 + 2i)| \leq |z - (2 + 3i)|$ ,  $|z - (1 + 2i)| \leq 1$  を同時に満たす複素数  $z$  の存在範囲を描き、この部分の面積を求めよ.

**解説**

$z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおくと

$$|z - (1 + 2i)| \leq |z - (2 + 3i)| \text{ より}$$

$$|(x - 1) + (y - 2)i|^2 \leq |(x - 2) + (y - 3)i|^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq (x - 2)^2 + (y - 3)^2$$

$$\therefore x + y \leq 4 \dots \textcircled{1}$$

$$|z - (1 + 2i)| \leq 1 \text{ より}$$

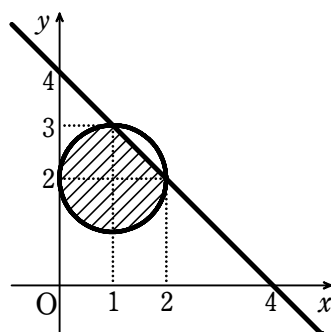
$$|(x - 1) + (y - 2)i| \leq 1$$

$$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 1 \dots \textcircled{2}$$

よって、 $z$  の存在範囲は図の斜線部

ただし、境界線上の点を含む

また、求める面積は



$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$$

〔注〕 $z$  のまま処理してもよいが、 $z$  の式では直線の方程式からどのような直線かが分かりづらいので、 $z = x + yi$  において処理したほうがよい。

### (3) 複素数平面上の直線

複素数平面上の直線を、複素数  $z$  の方程式で表すことを考える。

方程式の求め方は、主に

1.  $z = x + yi$  において方程式を求める。
2. 共線条件、垂直条件を利用し  $z$  のまま求める。

のいずれかである。以下、問題を通して考える。

#### 例5

複素数平面上において、複素数  $z$  は原点を通らない直線上を動くものとする。このとき、 $z$  はある複素数  $\alpha$  に対して、 $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1 = 0$  を満たすことを示せ。

〔解説〕

複素数  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) に対し、  
複素数平面上の原点を通らない任意の直線は

$$ax + by + c = 0 \quad (c \neq 0)$$

と表せる

$$\text{ここで、} x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ より}$$

$$a \cdot \frac{z + \overline{z}}{2} + b \cdot \frac{z - \overline{z}}{2i} + c = 0$$

$$(a - bi)z + (a + bi)\overline{z} + 2c = 0$$

$c \neq 0$  より

$$\frac{a - bi}{2c}z + \frac{a + bi}{2c}\overline{z} + 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{a + bi}{2c} \text{ とおくと、} \overline{\alpha} = \frac{a - bi}{2c} \text{ より}$$

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1 = 0$$

別解 1

原点を通らない直線を  $l$  とし、原点  $O$  から直線  $l$  に垂線  $OH$  を下ろす点  $H$  を表す複素数を  $a$  とすると、 $l$  上の任意の点  $P(z)$  に対して、

$z \neq a$  のとき

$\angle OHP = 90^\circ$  より

$$\arg \frac{z-a}{a} = \pm 90^\circ$$

$\frac{z-a}{a}$  は純虚数であるから

$$\frac{z-a}{a} + \overline{\left(\frac{z-a}{a}\right)} = 0$$

$$\frac{z}{a} + \frac{\bar{z}}{a} - 2 = 0$$

$$-\frac{z}{2a} - \frac{\bar{z}}{2a} + 1 = 0$$

$\alpha = -\frac{1}{2a}$  とおくと、 $\bar{\alpha} = -\frac{1}{2a}$  より

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 1 = 0$$

$z = a$  のときも上の方程式を満たす

別解 2

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + 1 = 0$$

$$2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = -1$$

$$\therefore \operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおくと

$$\operatorname{Re}\{r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))z\} = -\frac{1}{2}$$

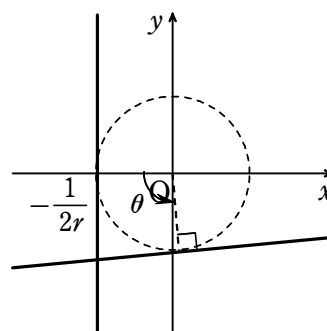
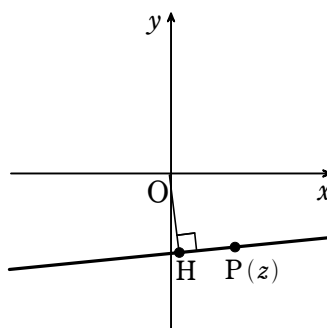
$$\therefore \operatorname{Re}\{(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))z\} = -\frac{1}{2r}$$

よって、 $z$  を  $-\theta$  だけ回転すると、実部

が  $-\frac{1}{2r}$  となるから、

$z$  は実部が  $-\frac{1}{2r}$  となるものの集合、すなわち直線を

$\theta$  だけ回転したもの



**例6**

等式  $(1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$  はどのような図形を表すか。

**解説**

$$(1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$$

$$(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$$

$z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおくと,

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2yi \quad \text{より}$$

$$2x - 2y - 2 = 0$$

よって, 直線  $y = x - 1$  を表す

**注** 直線については,  $z$  の式のままでどのような直線を表すかが少し分かりづらいので,  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおいて考えるとよい。ただし, 次のように考えれば, 多少は見通しがよい。

**別解**

$$(1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$$

$$(1+i)z + \overline{(1+i)z} = 2$$

$$\therefore \operatorname{Re}(1+i)z = 1$$

$$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{より,}$$

$z$  を原点の周りに  $\frac{\pi}{4}$  回転して, 原点からの距離を  $\sqrt{2}$  倍すれば  $z$  の実部が 1 となるから,

これを逆に考えて,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  を原点の周りに  $-\frac{\pi}{4}$  回転して,

直線  $y = x + 1$  を表す

**例7**

$a$  と  $b$  は  $|a| = |b| = 1$  をみたす相異なる複素数とする。複素数平面上で複素数  $z$  が  $a$  と  $b$  を結ぶ直線上にあるとき,  $z + ab\bar{z} = a + b$  が成り立つことを示せ。ただし,  $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数を表す。

**解説**

$a$  と  $b$  を結ぶ直線上の任意の点  $P(z)$  に対して

$z \neq a, b$  のとき

$$\arg \frac{b-z}{a-z} = 0^\circ, 180^\circ \quad \text{であるから,} \quad \frac{b-z}{a-z} \text{ は実数より}$$

$$\left(\frac{\overline{b-z}}{a-z}\right) = \frac{b-z}{a-z}$$

$$(\overline{b-z})(a-z) = (b-z)(\overline{a-z})$$

$$z\overline{z} - \overline{b}z - a\overline{z} + a\overline{b} = z\overline{z} - \overline{a}z - b\overline{z} + \overline{a}b$$

$$(\overline{a}-\overline{b})z - (a-b)\overline{z} = \overline{a}b - a\overline{b}$$

ここで、 $|a|=|b|=1$  であるから、 $\overline{a} = \frac{1}{a}, \overline{b} = \frac{1}{b}$  より

$$\frac{b-a}{ab}z + (b-a)\overline{z} = \frac{b^2-a^2}{ab}$$

$$z + ab\overline{z} = a + b$$

$z = a, b$  のときも上の方程式を満たす

**別解**

$|a|=|b|=1$  より、 $a, b$  は円  $|z|=1$  上にあるから、

原点  $O$  からこの直線に垂線を下ろすと、垂線の足は  $\frac{a+b}{2}$

あとは、直線上の任意の点を  $z$  として、垂直条件を利用する

### 例8

三角形の頂点  $O, A, B$  を表す複素数をそれぞれ  $0, \alpha, \beta$  とする。

(1) 線分  $OA$  の垂直二等分線上の点を表す複素数  $z$  は、 $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} - \alpha\overline{\alpha} = 0$  を満たすことを示せ。

(2)  $\triangle OAB$  の外心を表す複素数を  $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}$  を用いて表せ。

**解説**

(1)  $|z|=|z-\alpha|$  より

$$|z|^2 = |z-\alpha|^2$$

$$z\overline{z} = (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})$$

$$\therefore \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} - \alpha\overline{\alpha} = 0$$

(2) 同様に、線分  $OB$  の垂直二等分線上の点を表す複素数  $z$  は

$$\overline{\beta}z + \beta\overline{z} - \beta\overline{\beta} = 0$$

を満たす。

$\triangle OAB$  の外心は、これらの交点であるから

① $\times\beta$  - ② $\times\alpha$  より

$$(\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})z = \alpha\beta(\overline{\alpha} - \overline{\beta})$$

3点  $O, A, B$  は同一直線上にないから  $\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} \neq 0$  より

$$z = \frac{\alpha\beta(\overline{\alpha} - \overline{\beta})}{\alpha\beta - \alpha\overline{\beta}}$$

### 例9

- (1) 複素数平面上で  $z=0$  を通り，中心が  $\alpha$  の円の方程式は  $z\overline{z} = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$  で与えられることを示せ．ただし， $\overline{z}$  は  $z$  に共役な複素数である．  
 (2) 2点  $z=0, 1$  を通る円の中心  $\alpha$  はどのような条件を満たすか． $\alpha$  についての式を示し，図形的な意味を述べよ．  
 (3) 3点  $z=0, 1, \beta$  を通る円の中心  $\alpha$ ，および，その円の方程式を求めよ．ただし， $\beta$  は実数ではないとする．

#### 解説

- (1) 中心が  $\alpha$  で  $z=0$  を通る円は，半径が  $|\alpha|$  より

$$|z - \alpha| = |\alpha|$$

$$|z - \alpha|^2 = |\alpha|^2$$

$$(z - \alpha)(\overline{z - \alpha}) = \alpha\overline{\alpha}$$

$$(z - \alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = \alpha\overline{\alpha}$$

$$\therefore z\overline{z} = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$$

- (2) (1)の円が  $z=1$  を通るとき

$$\alpha + \overline{\alpha} = 1 \quad (\overline{z} = 1 \text{ から})$$

よって， $\alpha$  の実部が  $\frac{1}{2}$  であるから

円の中心は2点  $z=0$  と  $z=1$  を結ぶ線分の垂直二等分線上にある

- (3) (2)の円  $z\overline{z} = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$  ( $\alpha + \overline{\alpha} = 1$ ) が，

さらに  $z=\beta$  を通るから

$$\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = \beta\overline{\beta}$$

$$\alpha + \overline{\alpha} = 1 \text{ から } \alpha\overline{\beta} + (1 - \alpha)\beta = \beta\overline{\beta}$$

$\beta - \overline{\beta} \neq 0$  より

$$\alpha = \frac{\beta(1 - \overline{\beta})}{\beta - \overline{\beta}}$$

よって

$$z\overline{z} = \frac{\beta(1 - \overline{\beta})}{\beta - \overline{\beta}}z + \frac{\overline{\beta}(1 - \beta)}{\overline{\beta} - \beta}z$$

# 例10

$i$  は虚数単位とする。複素数  $z$  に対して、その共役複素数を  $\bar{z}$  で表す。複素数平面上で、次の等式を満たす点  $z$  の全体が表す図形を  $C$  とする。

$$z\bar{z} + (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 9 = 0$$

(1) 図形  $C$  を複素数平面上にかけ。

(2) 複素数  $w$  に対して、 $\alpha = w + \bar{w} - 1$ ,  $\beta = w + \bar{w} + 1$  とする。 $w$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  が表す複素数平面上の点をそれぞれ  $P$ ,  $A$ ,  $B$  とする。点  $P$  は  $C$  上を動くとする。  $\triangle PAB$  の面積が最大となる複素数  $w$ , およびそのときの  $\triangle PAB$  の外接円の中心と半径を求めよ。

解説

$$(1) z\bar{z} + (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 9 = 0$$

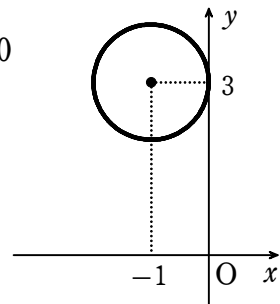
$$\{z + (1-3i)\}\{\bar{z} + (1+3i)\} - (1-3i)(1+3i) + 9 = 0$$

$$(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) - 1 = 0$$

$$|z - (-1 + 3i)|^2 = 1$$

$$|z - (-1 + 3i)| = 1$$

点  $z$  は点  $(-1 + 3i)$  を中心とし半径 1 の円を表す  
よって、図形  $C$  は右図



(2)  $w + \bar{w}$  は実数より、2点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  は実軸上の点であり、 $AB = 2$  である

よって、 $\triangle PAB$  の面積が最大となるのは

$$w = -1 + 4i$$

のとき(高さが最大するとき)

このとき、 $w + \bar{w} = -2$  より

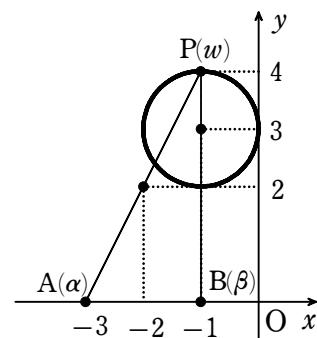
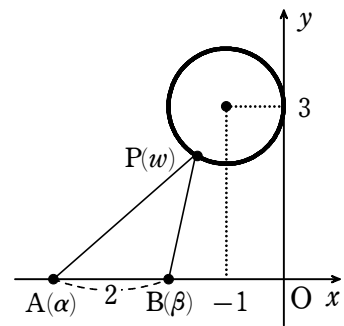
$$\alpha = -3, \beta = -1$$

また、 $\angle PBA = 90^\circ$  となり、 $\triangle PAB$  の外接円の中心は、線分  $PA$  の中点より

$$\frac{(-1 + 4i) + (-3)}{2} = -2 + 2i$$

よって、半径は

$$|(-2 + 2i) - (-1)| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$$



### 例11

複素数平面上の点  $z$  を考える.

(1) 実数  $a, c$  と複素数  $b$  が  $|b|^2 - ac > 0$  を満たすとき,  $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  を満たす点  $z$  は  $a \neq 0$  のとき, どのような図形を描くか. ただし,  $\bar{z}$  は  $z$  に共役な複素数を表す.

(2) 0 でない複素数  $d$  に対して,  $dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1)$  を満たす点  $z$  はどのような図形を描くか.

(解説)

$$(1) az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$$

$$z\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}z + \frac{b}{a}\bar{z} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}\right) = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

$$\left|z + \frac{b}{a}\right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$$

よって, 中心  $-\frac{b}{a}$ , 半径  $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$  の円を描く

$$(2) dz(\bar{z} + 1) = \bar{d}\bar{z}(z + 1) \text{ から}$$

$$(d - \bar{d})z\bar{z} + dz - \bar{d}\bar{z} = 0$$

$$d = \bar{d} \text{ のとき, } d(z - \bar{z}) = 0$$

$$d \neq 0 \text{ であるから, } z = \bar{z}$$

よって, 実軸を描く

$$d \neq \bar{d} \text{ のとき}$$

両辺を  $d - \bar{d}$  で割ると

$$z\bar{z} + \frac{d}{d - \bar{d}}z - \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}\bar{z} = 0$$

$$\left(z - \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}\right)\left(\bar{z} + \frac{d}{d - \bar{d}}\right) = \left|\frac{d}{d - \bar{d}}\right|^2$$

$$\left(z - \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}\right) = \left|\frac{d}{d - \bar{d}}\right|^2$$

$$\left|z - \frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}\right| = \left|\frac{d}{d - \bar{d}}\right|$$

よって, 中心  $\frac{\bar{d}}{d - \bar{d}}$ , 半径  $\left|\frac{d}{d - \bar{d}}\right|$  の円を描く

一般に,  $a, b$  を実数,  $\beta$  を複素数とするとき,  
方程式  $az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$  がどのような図形を表すかを考える。

$a=0$  のとき

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$$

$\beta=0$  のとき,

$c=0$  ならば,  $z$  は任意, すなわち複素数平面上の点すべてを表し,

$c \neq 0$  ならば, 何の図形も表さない。

$\beta \neq 0$  のとき,  $\beta = p + qi$  ( $p, q$  は実数)とすると,

$$p(z + \bar{z}) - qi(z - \bar{z}) + c = 0$$

$z = x + yi$  ( $x, y$  は実数)とすると,  $z + \bar{z} = 2x, z - \bar{z} = 2yi$  より

$$2px + 2qy + c = 0$$

となり, 直線を表す。

$a \neq 0$  のときは, 本問の結果より,

$|\beta|^2 > ac$  であれば, 点  $-\frac{\beta}{a}$  を中心とする半径  $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - ac}}{|a|}$  の円を表し,

$|\beta|^2 = ac$  であれば, 点  $-\frac{\beta}{a}$  を表し,

$|\beta|^2 < ac$  であれば, 何の図形も表さない。

したがって, 次のことが成り立つ。

$a, b$  を実数,  $\beta$  を複素数とするとき, 方程式  $az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$  は  
 $a=0, \beta \neq 0$  のとき, 直線を表し,

$a \neq 0, |\beta|^2 > ac$  のとき, 点  $-\frac{\beta}{a}$  を中心とする半径  $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - ac}}{|a|}$  の円を表す

### 例12

(1) 複素数  $\alpha$  が  $|\alpha|=1, |\alpha+i|=\sqrt{3}$  を満たすとき,  $\alpha$  の値を求めよ。

(2)  $\alpha = \frac{1-i}{2}$  とする.  $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 1, |z|=1$  を同時に満足する複素数  $z$  を求めよ。

(解説)

(1)  $|\alpha|=1, |\alpha+i|=\sqrt{3}$  より,  $\alpha$  は

円  $|z|=1$  上かつ円  $|z+i|=\sqrt{3}$  上の点より,

これらの共有点として求めればよい

**解答 1**

$$|\alpha|=1 \text{ より, } \alpha\bar{\alpha}=1$$

$$|\alpha+i|=\sqrt{3} \text{ より}$$

$$\alpha\bar{\alpha}-i(\alpha-\bar{\alpha})+1=3 \quad \therefore \alpha-\bar{\alpha}=i$$

$$\text{よって, } \alpha \text{ の虚部は } \frac{1}{2}, \quad |\alpha|=1 \text{ より, } \alpha \text{ の実部は } \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

**解答 2**

$$|\alpha|=1 \text{ より, } \alpha=\cos\theta+i\sin\theta \quad (0\leq\theta<2\pi) \text{ とおける}$$

$$|\alpha+i|=\sqrt{3} \text{ より}$$

$$|\cos\theta+i(1+\sin\theta)|^2=3$$

$$\cos^2\theta+(1+\sin\theta)^2=3$$

として,  $\sin\theta, \cos\theta$  を求めればよい

**解答 3**

$$\alpha=x+yi \quad (x, y \text{ は実数}) \text{ とおくと}$$

$$|\alpha|=1 \text{ より, } x^2+y^2=1$$

$$|\alpha+i|=\sqrt{3} \text{ より, } x^2+(y+1)^2=3$$

として, これを解く

$$(2) \quad \bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=1$$

$$z=x+yi \quad (x, y \text{ は実数}) \text{ とおくと}$$

$$\bar{\alpha}(x+yi)+\alpha(x-yi)=1$$

$$(\alpha+\bar{\alpha})x-(\alpha-\bar{\alpha})yi=1$$

$$\therefore x-y=1 \cdots \textcircled{1}$$

また,  $|z|=1$  より

$$x^2+y^2=1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて

$$z=1, -i$$

**別解**

$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=1$  より,  $\bar{\alpha}z$  の実部が分かり,  $|\alpha|, |z|$  が分かるので,  
 $|\bar{\alpha}z|$  が分かり,  $\bar{\alpha}z$  が分かる。よって,  $z$  は求まる。

### 例13

$i$  を虚数単位とし、 $k$  を実数とする。 $\alpha = -1 + i$  であり、点  $z$  は複素数平面上で原点を中心とする単位円上を動く。

(1)  $w_1 = \frac{\alpha + z}{i}$  とする。 $w_1$  が描く図形を図示せよ。

(2)  $w_2$  は等式  $w_2 \overline{\alpha} - \overline{w_2} \alpha + ki = 0$  を満たす。 $w_2$  の軌跡が、(1) で求めた  $w_1$  の軌跡と共有点をもつ場合の  $k$  の最大値を求めよ。ただし、 $\overline{\alpha}$ 、 $\overline{w_2}$  はそれぞれ  $\alpha$ 、 $w_2$  の共役複素数である。

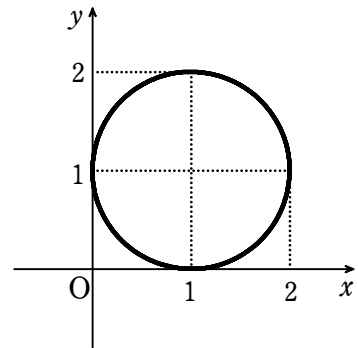
(解説)

(1) 点  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数) は原点を中心とする単位円上を動くから、 $\alpha + z$  はこれを  $x$  軸方向に  $-1$ 、 $y$  軸方向に  $1$  だけ平行移動し、

$\frac{\alpha + z}{i}$  は原点回りに  $-90^\circ$  回転させたもの

であるから、

$w_1$  が描く図形は右図



(2)  $w_2 = x + yi$  ( $x, y$  は実数) とおく

$w_2 \overline{\alpha} - \overline{w_2} \alpha + ki = 0$  より

$$(x + yi)(-1 - i) - (x - yi)(-1 + i) + ki = 0$$

$$(2x + 2y - k)i = 0$$

$$2x + 2y - k = 0$$

よって、 $xy$  平面上で円  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$  と直線  $2x + 2y - k = 0$  が共有点をもつような実数  $k$  の最大値を求めればよいから

$$\frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - k|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} \leq 1$$

$$|k - 4| \leq 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq k - 4 \leq 2\sqrt{2}$$

$$4 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 4 + 2\sqrt{2}$$

求める  $k$  の最大値は  $4 + 2\sqrt{2}$

例14

- (1) 複素数平面で  $\frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  かつ  $-1 \leq \operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq 0$  となる領域を図示せよ. ただし, 複素数  $\alpha$  を 2 つの実数  $a, b$  を用いて  $\alpha = a + bi$  と表したとき,  $\operatorname{Im} \alpha = b$  である.
- (2) (1) の領域の面積を求めよ.

解説

$$(1) -1 \leq \operatorname{Im} \frac{1}{z} \leq 0$$

$z = x + yi$  とおくと

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$-1 \leq -\frac{y}{x^2 + y^2} \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq y \text{ かつ } y \geq 0$$

よって,  $\frac{1}{2} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  と合わせ, 求める領域は図の斜線分

ただし, 境界含む

$$(2) [1] \text{ の部分の面積は } \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{8}$$

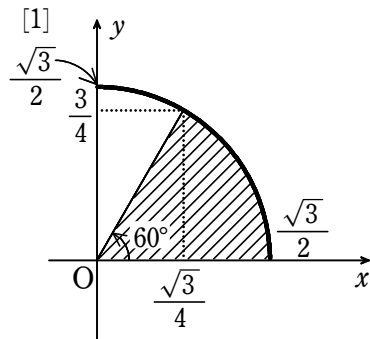
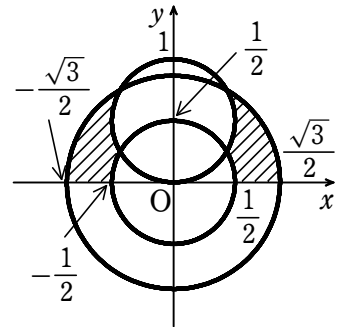
$$[2] \text{ の部分の面積は } \pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{12} = \frac{\pi}{48}$$

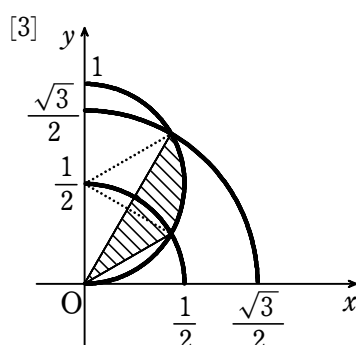
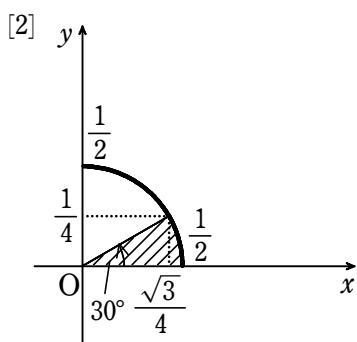
[3] の部分の面積は破線部分の図形の面積に等しいから

$$\pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{24}$$

よって, 求める面積を  $S$  とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{48} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{16} \quad \therefore S = \frac{\pi}{8}$$





#### (4) その他の軌跡

実数条件や純虚数条件，半直線のなす角を利用した軌跡の問題について考える。

##### 例15

0 でない複素数  $z$  に対して， $w = z + \frac{1}{z}$  とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)  $w$  が実数となるための  $z$  の満たす条件を求め，この条件を満たす  $z$  全体の図形を複素数平面上に図示せよ．

(2)  $w$  が実数で  $1 \leq w \leq \frac{10}{3}$  を満たすとき， $z$  の満たす条件を求め，この条件を満たす  $z$  全体の図形を複素数平面上に図示せよ．

解説

(1) 分母  $\neq 0$  より， $z \neq 0$

$w$  が実数のとき

$$\overline{w} = w$$

$$\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$$

$$|z|^2(\overline{z} - z) + z - \overline{z} = 0$$

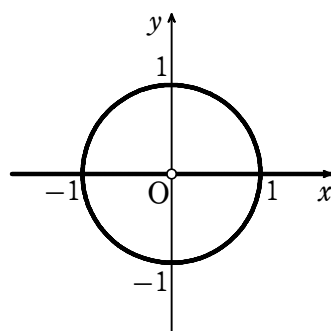
$$(|z|^2 - 1)(\overline{z} - z) = 0$$

$$\therefore \overline{z} = z, |z| = 1$$

これらを図示すると，右図

(2) (i)  $\overline{z} = z, z \neq 0$  のとき

$z$  は実数で， $1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$  より



$$z^2 \leq z^3 + z \leq \frac{10}{3} z^2$$

$$z^3 - z^2 + z \geq 0, 3z^3 - 10z^2 + 3z \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq z \leq 3$$

(ii)  $|z|=1$  のとき

$z\bar{z}=1$  であるから,  $\frac{1}{z}=\bar{z}$  より

$$1 \leq z + \bar{z} \leq \frac{10}{3}$$

$$1 \leq 2\operatorname{Re} z \leq \frac{10}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{5}{3}$$

(i), (ii)より, 右図

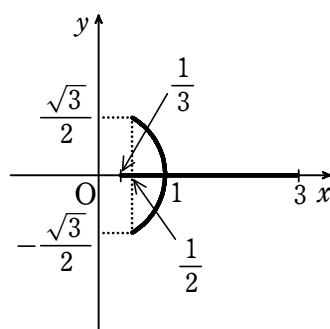
**別解**

(ii)  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $-180^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ) とおくと

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos \theta \text{ より}$$

$$1 \leq 2\cos \theta \leq \frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq 1 \quad \therefore -60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$



#### 例16

$z$  は複素数で,  $z \neq 0$ ,  $z \neq \pm 1$  とする。

(1) 複素数平面上の3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  が一直線上にあるための  $z$  についての必要十分条件を求めよ。

(2) 複素数平面上の3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  が  $\angle C$  を直角とする直角三角形の3頂点になるような  $z$  全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 複素数平面上の3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  が直角三角形の3頂点になるような  $z$  全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

**解説**

(1)  $z \neq 0$ ,  $z \neq \pm 1$  より, 3点  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  は異なる点である  
よって,  $A(1)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z^2)$  が一直線上にあるための必要十分条件は

$$\frac{z^2-1}{z-1}, \text{ すなわち } z+1 \text{ が実数}$$

したがって,  $z$  についての必要十分条件は  $0$ ,  $\pm 1$  を除く実数

(2)  $\angle C = 90^\circ$  のとき

$$\frac{z-z^2}{1-z^2} \text{ すなわち } \frac{z}{1+z} \text{ が純虚数}$$

$$\frac{z}{1+z} + \overline{\left(\frac{z}{1+z}\right)} = 0$$

$$\frac{z}{1+z} + \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}} = 0$$

$$2z\overline{z} + z + \overline{z} = 0$$

$$z\overline{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} = 0$$

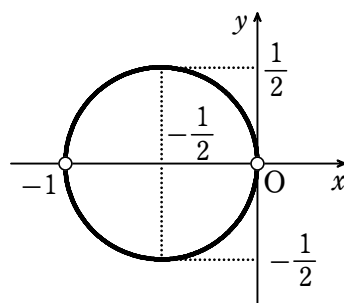
$$\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left|z + \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

よって,  $z$  は点  $-\frac{1}{2}$  を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の

円を描く (ただし,  $0$ ,  $-1$  は除く)

したがって, 求める図形は右図



(3) (i)  $\angle C = 90^\circ$  のとき

(2) より  $z$  は点  $-\frac{1}{2}$  を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円を描く

(ただし,  $0$ ,  $-1$  は除く)

(ii)  $\angle A = 90^\circ$  のとき

$$\frac{z^2-1}{z-1} \text{ すなわち } z+1 \text{ が純虚数より}$$

$$z = -1 + ai \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

よって、 $z$  は点  $-1$  を通り、実軸に垂直な直線を描く

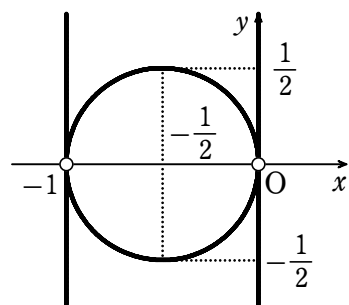
(ただし、点  $-1$  は除く)

(iii)  $\angle B = 90^\circ$  のとき

$\frac{z^2 - z}{1 - z}$  すなわち  $z$  が純虚数

(i) ~ (iii) より

$z$  全体を表す図形は右図



補1

$\alpha$  と  $\beta$  は異なる複素数とし、 $i$  は虚数単位とする。

(1) 複素数平面上の点  $\gamma$  は点  $\alpha$  と点  $\beta$  を結ぶ直線上にないとする。このとき、4 点  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  が平行四辺形の頂点となるような  $\delta$  を、 $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて表せ。

(2)  $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$  が実数となるような点  $z$  の集合は複素数平面上のどのような図形となるかを述べよ。

(3) 複素数  $z$  には  $t(z-\alpha)=i(z-\beta)$  を満たすような実数  $t$  があるとする。このような点  $z$  の集合は複素数平面上のどのような図形となるかを述べよ。

解説

(1) 4 点  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  が平行四辺形の頂点となる

とき、点  $\delta$  の位置は右の図のように、 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  の 3 通りある。

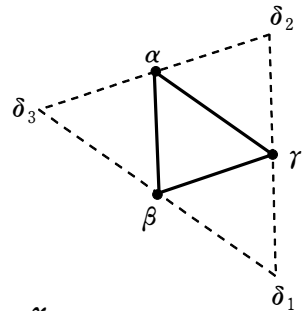
$$\delta = \delta_1 \text{ のとき, } \alpha - \beta = \gamma - \delta \quad \therefore \delta = -\alpha + \beta + \gamma$$

$$\delta = \delta_2 \text{ のとき, } \alpha - \beta = \delta - \gamma \quad \therefore \delta = \alpha - \beta + \gamma$$

$$\delta = \delta_3 \text{ のとき, } \alpha - \gamma = \delta - \beta \quad \therefore \delta = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\text{よって, } \delta = -\alpha + \beta + \gamma, \delta = \alpha - \beta + \gamma, \delta = \alpha + \beta - \gamma$$

以下、 $\alpha, \beta, z$  が表す点を A, B, Z とする



(2)  $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$  が実数となるとき

$$\arg \frac{z-\alpha}{z-\beta} = 0^\circ, 180^\circ \text{ より, 3 点 A, B, Z は同一直線上にある}$$

よって、点  $z$  の集合は 2 点  $\alpha, \beta$  を通る直線 (ただし、点  $\beta$  は除く)

$$(3) t(z-\alpha)=i(z-\beta)$$

$z=\alpha$  のとき

$$i(z-\beta)=0 \quad \therefore z=\beta$$

$\alpha=\beta$  となり、 $\alpha$  と  $\beta$  は異なる複素数であることに矛盾

よって、 $z \neq \alpha$

両辺  $z-\alpha$  で割って

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha} = \frac{t}{i} = -ti$$

$$t=0 \text{ のとき, } z=\beta$$

$t \neq 0$  のとき

$\frac{z-\beta}{z-\alpha}$  は純虚数より,  $\angle AZB = 90^\circ$

よって, 点  $z$  は 2 点  $\alpha, \beta$  を直径の両端とする円を描く

したがって, 点  $z$  の集合は 2 点  $\alpha, \beta$  を直径の両端とする円 (ただし, 点  $\alpha$  は除く)

補2

$\alpha, \beta$  が複素数で,  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, |\beta| = \sqrt{3}, \frac{\beta}{\alpha}$  の偏角が  $90^\circ$  のとき

(1) 次の条件を満たす  $r$  が描く図形を複素数平面上に図示せよ.

$$\frac{2r-\beta}{\alpha} \text{ は実数で, } 0 \leq \frac{2r-\beta}{\alpha} \leq 1$$

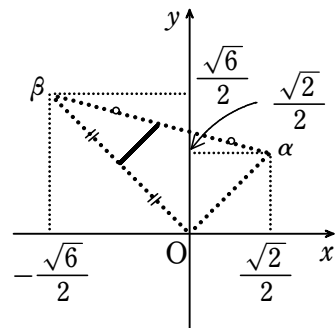
(2) 点  $r$  が (1) の図形上を動くとき,  $|z-r|=|r|$  を満たす点  $z$  が動く範囲の面積を求めよ.

解説

(1)  $\frac{2r-\beta}{\alpha} = t$  とおくと

$$r = \frac{\beta + t\alpha}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

よって,  $r$  は,  $\frac{\beta}{2}$  と  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  を結ぶ線分を描く



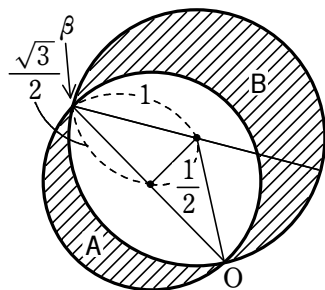
(2)  $|z-r|=|r|$  を満たす点  $z$  は, 中心が (1) の線分を移動し, 直径が  $\sqrt{3}$  から 2 まで変化する円群の通過領域を動く

図のように A, B とすると

$$\begin{aligned} A : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \left(1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \\ = \frac{3}{8}\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$B : 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

より, 求める面積  $S$  は  $S = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$



### 補3

$t$  は  $0 \leq t \leq 1$  を満たす実数とし,  $\alpha = ti$ ,  $\beta = 1$  とする. ここで,  $i$  は虚数単位である. 複素数  $\gamma$  はその実部と虚部が正であるものとし, 複素数平面上で,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  は正三角形をなす.

(1)  $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$  の値を求めよ.

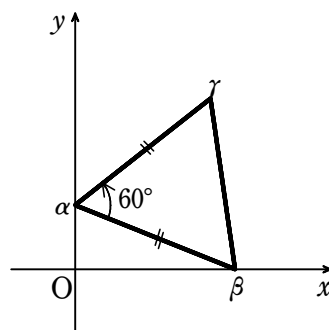
(2)  $t$  が 0 から 1 まで変わるとき,  $\gamma$  が描く図形を図示せよ.

(解説)

(1)  $\gamma$  が直線  $\alpha\beta$  に関して原点と同じ側にあるとすると,  $\angle\alpha\gamma\beta$  が  $90^\circ$  より大きくなるから矛盾よって,  $\triangle\alpha\beta\gamma$  は右図のようになり, 点  $\gamma$  は点  $\beta$  を点  $\alpha$  の周りに  $60^\circ$  だけ回転した点となるから

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$$

$$\therefore \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



(2) (1)より

$$\gamma = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \alpha$$

$$= (1 - ti)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + ti$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

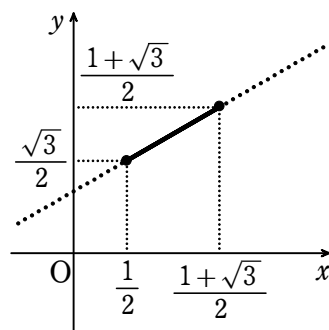
$\gamma = x + yi$  ( $x, y$  は実数)とおくと

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t$  を消去して

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 1)$$

$0 \leq t \leq 1$  より,  $\gamma$  は  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$  が表す 2 点を両端とする線分を描く



#### 補4

複素数  $\alpha, \beta$  は  $|\alpha - 1| = 1, |\beta - i| = 1$  を満たす.

(1)  $\alpha + \beta$  が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.

(2)  $(\alpha - 1)(\beta - 1)$  が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ.

(解説)

(1)  $|z - 1| = 1$  は中心 (1), 半径 1 の円を表し, これを  $C_1$  とする

$|z - i| = 1$  は中心 ( $i$ ), 半径 1 の円を表し, この円を  $C_2$  とする

円  $C_1$  上の点  $A(\alpha)$  と円  $C_2$  上の点  $B(\beta)$  について,

$D(\alpha + \beta)$  とすると  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  より  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$

$A$  を固定したとき,  $D$  は点  $\alpha + i$  を中心とする

半径 1 の円を描く

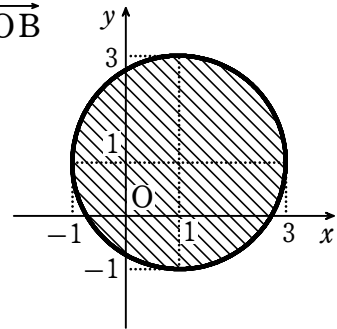
点  $\alpha$  は円  $C_1$  上を動くから, 点  $\alpha + i$  は点  $1 + i$

を中心とする半径 1 の円上を動く

よって, 点  $D$  の存在範囲は, 点  $1 + i$  を中心

とする半径 2 の円の内部および周である

したがって,  $\alpha + \beta$  の存在範囲は図の斜線部. ただし, 境界は含む



(2)  $|\alpha - 1| = 1$  より

$$\alpha - 1 = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0^\circ \leq \theta < 360^\circ)$$

とおける. このとき

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = (\beta - 1)(\cos \theta + i \sin \theta)$$

より,  $(\alpha - 1)(\beta - 1)$  は  $\beta$  を  $-1$  だけ平行移動

して, 原点の周りに  $\theta$  だけ回転した点である

から,  $(\alpha - 1)(\beta - 1)$  の存在範囲は, 原点を

中心とする半径  $\sqrt{2} - 1$  の円の外部および周で,

かつ, 原点を中心とする半径  $\sqrt{2} + 1$  の円の内部および周であり,

図の斜線部. ただし, 境界は含む

