

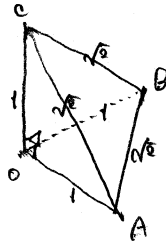
初等幾何 9. 空間図形

53

表面積 \$S\$ は

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$



\$OC \perp OA, OC \perp OB \therefore\$

平面 \$OAB \perp OC\$

体積 \$V\$ は

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$

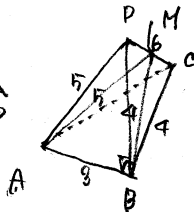
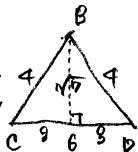
<point>

1. 体積の求め方について考える

54

① \$\triangle BCD\$ の面積 \$S\$ は

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$



② \$AB \perp BC, AB \perp BD \therefore\$

平面 \$BCD \perp AB\$

体積 \$V\$ は

$$V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{7} \times 3 = 3\sqrt{7}$$

③ \$\triangle ABM\$ に余弦定理より

$$7 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{3}{4}$$

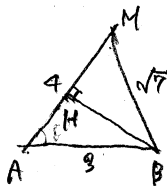
$$0 < A < 180^\circ \therefore \sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

\$\triangle ABM\$ の面積 \$S\$ は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AM \cdot BH = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot BH = \frac{3\sqrt{7}}{2} \therefore BH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$



56

① \$\triangle CBH\$ に余弦定理より

$$25 = 8 + 15 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

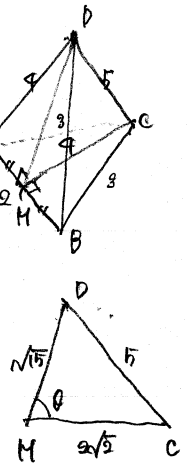
$$\textcircled{2} \vec{MD} \cdot \vec{MC} = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= -10$$

\$\triangle CDM\$ の面積 \$S\$ は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - (-10)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{119}$$



\$AB \perp MC, AB \perp MD \therefore\$

平面 \$CMD \perp AB\$

体積 \$V\$ は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{119} \cdot 2 = \frac{\sqrt{119}}{3}$$

57

\$\triangle OAB\$ と \$\triangle OBM\$ に余弦定理より

$$2^2 + 4^2 = 2(CM^2 + 2^2)$$

$$BM = 6 \therefore BM = \sqrt{6}$$

\$\triangle BMC\$ に余弦定理より

$$4 = 6 + 6 - 2\sqrt{6}\sqrt{6} \cos \angle BMC$$

$$\therefore \cos \angle BMC = \frac{1}{2}$$

$$\sin \angle BMC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

\$\triangle BMC\$ の面積 \$S\$ は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin \angle BMC = \sqrt{3}$$

\$G\$ は \$\triangle ABC\$ の外心である

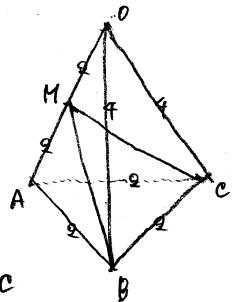
正弦定理より

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2AG \therefore AG = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

[別解]

\$\triangle ABC\$ の外接円の中心を \$O'\$ とし、\$O'\$ を \$OG\$ の延長上に取ると、\$O'\$ は \$OG\$ の中点である。



四面体OABCの体積Vを

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

<point>

1. 三脚の原理

OA=OB=OCのとす

Oから平面ABCに下した

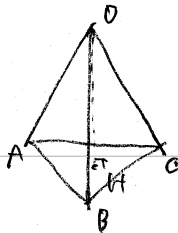
垂線の足をHとする

Hは△ABCの外心である

[証明]

△OAH≡△OBH≡△OCHより

HA=HB=HC



2. 高さから何角に等しいかについて考える

1つの面に2つの面が接するところから考える

[61]

d) 1/8, e) 3, f) 4.

g) $8 \times 3 \div 4 = 6$

h) 3, i) 2

j) $8 \times 3 \div 2 = 12$

k) $v-e+f=2$

l) 1) $(12 \times 5 + 20 \times 6) \div 3 = 60$

2) $(12 \times 5 + 20 \times 6) \div 2 = 90$

m) 立体で2つの面に接するところから

1つの面に2つの面が接するところから

1つの面が接するところから

各面に正三角形が接するところから

$3 \leq 17$ の面に接するところから

n) 17の面に接するところから

正三角形の面に接するところから

頂点から $\frac{3n}{3} = n$

2. $\frac{3n}{2}$

$v-e+f=2$ より

$n - \frac{3n}{2} + n = 2 \quad \therefore n = 4$

四面体OABCの体積Vを

四面体OABCの体積Vを

$$\frac{3n}{4} - \frac{3n}{2} + n = 2 \quad \therefore n = 4$$

四面体OABCの体積Vを

四面体OABCの体積Vを

$$\frac{3n}{5} - \frac{3n}{2} + n = 2 \quad \therefore n = 10$$

四面体OABCの体積Vを

$$3 \leq \text{各面に接するところから} < 4 \quad \frac{360}{90}$$

四面体OABCの体積Vを

四面体OABCの体積Vを

$$\frac{4n}{3} - 2n + n = 2 \quad \therefore n = 6$$

四面体OABCの体積Vを

$$3 \leq \text{各面に接するところから} < \frac{360}{108}$$

四面体OABCの体積Vを

四面体OABCの体積Vを

$$\frac{5n}{3} - \frac{5n}{2} + n = 2 \quad \therefore n = 12$$

<point>

Vertex edge face

1. オイラーの多面体定理 $v-e+f=2$

[62]

2) 12, 6

3) 17の面に接するところから

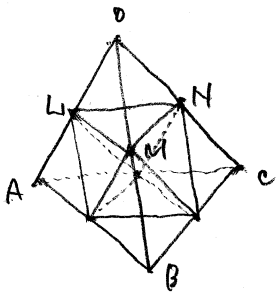
四面体OABCの体積Vを

$$(8 \times 6 + 6 \times 4) \div 2 = 36$$

4) $v-e+f=2$ より

$$v - 36 + 17 = 2 \quad \therefore v = 24$$

64



このように正四面体は正四面体の中にあり
(正四面体の各辺は正四面体のABCの各辺の中点を通るため)

正四面体のO-LMN. Oは正四面体の重心であるから

正四面体のO-ABCの重心は1/4

$$\frac{\text{四面体の体積}}{\text{四面体の体積}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4} \times 4} = \frac{1}{4}$$

<point>

1. 正四面体と正四面体の関係

66

$$d) 20 \times 9 \div 5 = 12$$

$$\begin{aligned} R \sin 36^\circ &= \frac{1}{2} \\ R &= \frac{1}{2 \sin 36^\circ} \\ &= \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

BE=xとすると
△LBEの定理より

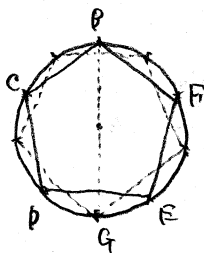
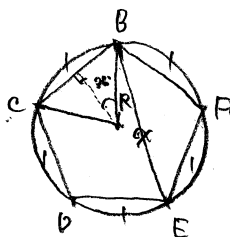
$$1+x=x^2$$

$$x^2-x-1=0 \quad \therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

⑧ B, E, Gは球面上の点より
これら3点を含む平面上の
点である。

BQの垂直二等分線は

∠BEQ=90°より

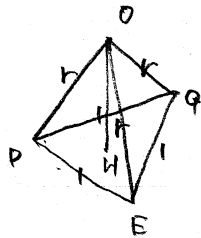


$$BQ^2 = BE^2 + EQ^2$$

$$= \frac{3+2\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{5+2\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore BQ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

⑨ 球の半径をrとすると
Oから△DEGに下ろした垂線の
足をHとすると
Hは△DEGの重心



$$2DH = \frac{1}{\sin 60^\circ} \quad \therefore DH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}}$$

よって求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{\frac{14+2\sqrt{5}}{48}} \\ &= \frac{1}{48} \sqrt{14+2\sqrt{5}} = \frac{3+2\sqrt{5}}{48} \end{aligned}$$

注: 球の半径rを求めると正四面体の体積は

<point>

1. 正四面体の性質

68

このようにOから平面ABCに
下ろした垂線の足をHとすると
Hは△ABCの重心

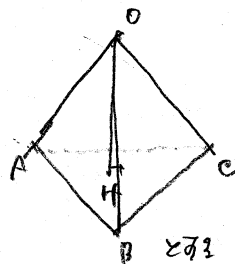
$$2AH = \frac{1}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore AH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$OH = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

四面体の体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$



(内接球の中心をIとし半径をrとすると)

四面体の $O-ABC = I-OAB + I-OBC + I-OCA + I-ABC$ より

$$\frac{\sqrt{2}}{12} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot r$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} r$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

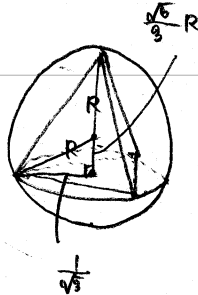
外接球の半径をRとすると

$$R^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - R\right)^2$$

$$R^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3}R + R^2$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}R = 1$$

$$\therefore R = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



[71]

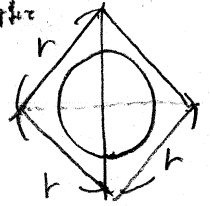
(1) 正四面体の1辺をaとすると

正四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

よって

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times \sin 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a \quad \therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$



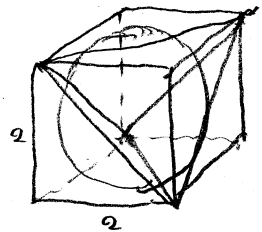
(2) 正四面体の1辺をaとすると

正四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

この正四面体は2つの正四面体

の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

正四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと



<point>

1. 正四面体の外接球の半径、内接球の半径、外接球の半径

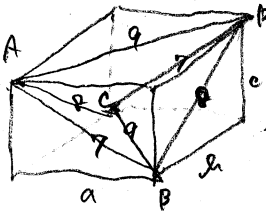
[70]

四面体の外接球の半径

四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

(2) のように a, b, c とおくと

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 8 \dots ① \\ b^2 + c^2 = 8 \dots ② \\ c^2 + a^2 = 8 \dots ③ \end{cases}$$



①+②+③より

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$\therefore a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}, c = 4$$

四面体の外接球の半径をRとすると

$$V = \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 4$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4$$

$$= \frac{16\sqrt{11}}{3}$$

<point>

1. 四面体の外接球の半径

四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと

(四面体の外接球の半径は $\frac{\sqrt{2}}{12} a$ とおくと)