12 [(1) 2009 立教大　(2) 2007 関西大]

(1) $x+y=3$ ならば，x^2+y^2 は $x=$ ア$\boxed{}$ のとき最小値 イ$\boxed{}$ をとる。

(2) $x+y=1$，$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$x-2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) 多変数 → 一方の文字が他方の文字に影響を及ぼさない　独立　第1講

〃　　及ぼす　従属　第2講〜

$x+y=3$ より $y=3-x$

$x^2+y^2=x^2+(3-x)^2$

$=2x^2-6x+9$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$

$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{2}$ のとき 最小　最小値 $\frac{9}{2}$ //

(2) $x+y=1$ より $x=1-y$

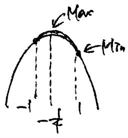
$0 \leqq x \leqq 2$ より

$0 \leqq 1-y \leqq 2$

$-1 \leqq -y \leqq 1$　∴ $-1 \leqq y \leqq 1$

$x-2y^2=1-y-2y^2$

$=-2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$



最大値 $\frac{9}{8}$

小　-2 //

最大・最小問題の解法

1. 平方完成・微分
2. 実数条件
3. 対称式
4. 三角関数（合成・倍角等）
5. 図形と式（線形計画法）
6. ベクトル（内積）
7. 不等式（相加相乗・シュワルツ）
8. 関数（置き換え）

⋮

13 [(1) 2002 法政大　(2) 2007 関西学院大]

(1) $y+2x=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ。

(2) $y-3x=1$ $(-2 \leqq y \leqq 1)$ のとき，x^2+2y^2 は $x=$ ア$\boxed{}$，$y=$ イ$\boxed{}$ で最大値 ウ$\boxed{}$ をとり，$x=$ エ$\boxed{}$，$y=$ オ$\boxed{}$ で最小値 カ$\boxed{}$ をとる。

14 [1997 同志社大]

実数 x, y が $x+y=1$ および $x \geqq 0, y \geqq 0$ を満たすとき

(1)　xy の最大値と最小値を求めよ．

(2)　$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) $x+y=1$ より $y=1-x$

$y \geqq 0$ より

$1-x \geqq 0$　∴ $x \leqq 1$ ← 変域注意

よって

$xy=x(1-x)$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

$=-x^2+x$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

最大値は $\frac{1}{4}$

小　0 //

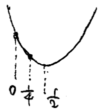
(2) $x^2y^2+x^2+y^2+xy=(xy)^2+(x+y)^2-xy$

$=(xy)^2-xy+1$

$t=xy$ とおくと $0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$

$=t^2-t+1$　$\left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\right)$

$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$



$t=0$ のとき最大で　最大値 1

$t=\frac{1}{4}$　〃　小　〃　$\frac{13}{16}$ //

15 [Ⅰ. 2021 東北学院大　Ⅱ. 1996 近畿大]

Ⅰ. 実数 x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y=2$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　xy の最大値と最小値およびそのときの x，y の値を求めよ。

(2)　$t=xy$ とおくとき，$x^2y^2+x^2+3xy+y^2$ を t の式で表せ。

(3)　$x^2y^2+x^2+3xy+y^2$ の最大値と最小値およびそのときの x，y の値を求めよ。

Ⅱ. 実数 x, y が $x^2+2xy+y^2+x+y-6=0$ を満たすとき，xy は $x=$ ア$\boxed{}$，$y=$ イ$\boxed{}$ で最大値 ウ$\boxed{}$ をとり，x^2+2y^2 は $x=$ エ$\boxed{}$，$y=$ オ$\boxed{}$ で最小値 カ$\boxed{}$ をとる．

16 [(1) 2008 摂南大　(2) 2011 関西大　(3) 2005 関西大]

(1) x，y が条件 $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x^2+2y-1$ の最大値，最小値を求めよ。

(2) 実数 x，y が $2x^2+y^2=8$ を満たすとき，x^2+y^2-6x の最大値を求めよ。

(3) x，y が実数で $3x^2+2y^2=-2x$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$ より　$x^2=1-y^2$

$x^2\geqq 0$ より（xは実数であるから）

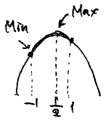
$1-y^2\geqq 0$

$y^2\leqq 1$　∴ $-1\leqq y\leqq 1$

$2x^2+2y-1=2(1-y^2)+2y-1$

$=-2y^2+2y+1$

$=-2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$



$y=\frac{1}{2}$ のとき最大　最大値 $\frac{3}{2}$

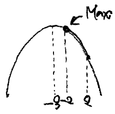
$y=-1$　〃　小　〃　-3 //

(2) $2x^2+y^2=8$ より　$y^2=8-2x^2$

$y^2\geqq 0$ より

$8-2x^2\geqq 0$

$x^2\leqq 4$　∴ $-2\leqq x\leqq 2$



$x^2+y^2-6x=x^2+(8-2x^2)-6x$

$=-x^2-6x+8$

$=-(x+3)^2+17$

$x=-2$ のとき最大　最大値 16 //

(3) $3x^2+2y^2=-2x$ より

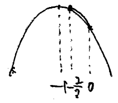
$y^2=-\frac{3}{2}x^2-x$

$y^2\geqq 0$ より

$-\frac{3}{2}x^2-x\geqq 0$

$3x^2+2x\leqq 0$

$x(3x+2)\leqq 0$　∴ $-\frac{2}{3}\leqq x\leqq 0$



$x=-\frac{2}{3}$ のとき最大

最大値 $\frac{4}{9}$ //

$x^2+y^2=x^2+\left(-\frac{3}{2}x^2-x\right)$

$=-\frac{1}{2}x^2-x$

$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$

17 [(2) 長崎総合科学大　(3) 1997 近畿大]

(1) 実数 x, y が $x^2+y^2=4$ を満たしているとき，$4x+2y^2$ の最大値と最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ。

(2) x, y を実数とする．$x^2+2y^2=1$ のとき，$x+3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 実数 x, y が $5x^2+2y^2=7x$ を満たすとき，x^2+y^2 は $x=$ ア☐ において最大値 イ☐ をとり，$x=$ ウ☐ において最小値 エ☐ をとる．

18 [2002 同志社女子大]

$2x^2+3y^2+4x+6$ は，x，y が任意の値をとって変化するとき，$x=$ ア☐，$y=$ イ☐ で最小値 ウ☐ をとるが，x，y が $x^2+y^2=9$ を満たしながら変化するときは，$x=$ エ☐，$y=$ オ☐ で最小値 カ☐ をとり，$x=$ キ☐，$y=\pm\sqrt{ク☐}$ で最大値 ケ☐ をとる．

19 [(1) 2002 北見工業大　(2) 関西大　(3) 2000 武蔵工業大　(4) 大阪大]

(1) x，y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$x+y$ の最大値は ア☐ であり，最小値は イ☐ である．

(2) 実数 x, y について，$x^2+2y^2=1$ が成り立つとき，$3x-4y$ の最大値および最小値を求めよ．

(3) x，y が実数で，$x^2+y^2=2x$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) x, y が $x\geqq 0, y\geqq 0, x^3+y^3=1$ を満たしながら変わるとき，$x+y$ がとり得る値の範囲を求めよ．

(1) $x+y=k$ とおくと

$y=k-x$

$x^2+y^2=2$ より

$x^2+(k-x)^2=2$

$2x^2-2kx+k^2-2=0$

xは実数であるから

判別式をDとするとD≧0より

$D/4=k^2-2(k^2-2)\geqq 0$

$k^2\leqq 4$

∴ $-2\leqq k\leqq 2$

よって

最大値は $\boxed{2}$

小　$\boxed{-2}$

(2) $3x-4y=k$ とおくと

$x=\frac{1}{3}(4y+k)$

$x^2+2y^2=1$ より

$\frac{1}{9}(4y+k)^2+2y^2=1$

$16y^2+8ky+k^2+18y^2=9$

$34y^2+8ky+k^2-9=0$

yは実数であるから

判別式をDとするとD≧0より

$D/4=16k^2-34(k^2-9)\geqq 0$

$k^2\leqq 17$

∴ $-\sqrt{17}\leqq k\leqq \sqrt{17}$

よって

最大値 $\sqrt{17}$

小　$-\sqrt{17}$ //

(3) $x+y=k$ とおくと

$y=k-x$

$x^2+y^2=2x$ より

$x^2+(k-x)^2=2x$

$2x^2-2(k+1)x+k^2=0$

xは実数であるから

判別式をDとするとD≧0より

$D/4=(k+1)^2-2k^2\geqq 0$

$=-k^2+2k+1\geqq 0$

$k^2-2k-1\leqq 0$

∴ $1-\sqrt{2}\leqq k\leqq 1+\sqrt{2}$

よって

最大値は $1+\sqrt{2}$

小　$1-\sqrt{2}$ //

(4) $x+y=k$ とおくと

$y=k-x$

$x^3+y^3=1$ より

$x^3+(k-x)^3=1$

$x^3+k^3-3k^2x+3kx^2-x^3=1$

$3kx^2-3k^2x+k^3-1=0$ …①

$y^3=1-x^3$，$y\geqq 0$ から $y^3\geqq 0$ より

$1-x^3\geqq 0$

$x^3\leqq 1$

$(x-1)(x^2+x+1)\leqq 0$

$x-1\leqq 0$　∴ $x\leqq 1$　∴ $0\leqq x\leqq 1$

①が $0\leqq x\leqq 1$ で少なくとも1つの実数解をもつkの範囲を求めればよい

∴ 大変

→ 解の配置。

20 [(1) 2004 明治大　(2) 2003 星薬科大　(3) 青山学院大　(4) 岡山県立大]

(1) 実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x-y$ の最大値を求めよ．

(2) 実数 x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たすとき，$\frac{y}{x-1}$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 (x, y) が，方程式 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ を満たしながら動くとき，$x+2y$ の最大値は☐で最小値は☐である．

(4) 実数 x, y が $x^3+y^3=3xy$ を満たすとき，$x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

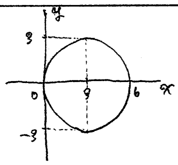
21 [鳴門教育大]

実数の変数 x, y の間に $x^2+y^2=18$ の関係があるとき，関数 $(x+y)^2-6(x+y)+12$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

$\boxed{22}$ [1997 琉球大]

実数 x, y が方程式 $x^2+y^2-6x=0$ を満たすとき，x の最大値，y の最小値および $x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．

$x^2+y^2-6x=0$
$(x-3)^2+y^2=9$
図より
　xの最大値 6
　y 〃 小 〃 -3



[別解]
$x^2+y^2-6x=0$
$y^2=6x-x^2$
$y^2\geqq 0$より
　$6x-x^2\geqq 0$　$\therefore 0\leqq x\leqq 6$

$x+2y=k$ とおく
$x+2y=k$ が $x^2+y^2-6x=0$ と
共有点をもつときのkの最大、最小を求めればよい
$x+2y=k$ と $x^2+y^2-6x=0$ が共有点をもつとき
$\dfrac{|3-k|}{\sqrt{5}}\leqq 3$
$|3-k|\leqq 3\sqrt{5}$
$-3\sqrt{5}\leqq k-3\leqq 3\sqrt{5}$
$\therefore 3-3\sqrt{5}\leqq k\leqq 3+3\sqrt{5}$

よって
　最大値 $3+3\sqrt{5}$
　 〃 小 〃 $3-3\sqrt{5}$

$\boxed{23}$

(1) $x^2+y^2=6x-8y$ のとき，x, y のそれぞれの最大値，最小値を求めよ．

(2) 実数 x, y が $x^2-xy+y^2-y-1=0$ を満たすとき，y の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{24}$ [1996 神戸学院大]

x, y が実数で $x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$-x^2-2x+1$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　$x+2y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $x^2-2xy+2y^2=2$
$2y^2-2xy+x^2-2=0$
yは実数であるから
判別式をDとすると $D\geqq 0$ より
$D/4=x^2-2(x^2-2)\geqq 0$
　$x^2\leqq 4$　$\therefore -2\leqq x\leqq 2$

(2) $-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$
$-7\leqq -x^2-2x+1\leqq 2$

(3) $x+2y=k$ とおくと
$x=k-2y$
$x^2-2xy+2y^2=2$ より
$(k-2y)^2-2(k-2y)y+2y^2=2$
$10y^2-6ky+k^2-2=0$
yは実数であるから
判別式をDとすると$D\geqq 0$より
$D/4=9k^2-10(k^2-2)$
　$-k^2+20\geqq 0$
　$k^2\leqq 20$
$\therefore -2\sqrt{5}\leqq k\leqq 2\sqrt{5}$
$\therefore -2\sqrt{5}\leqq x+2y\leqq 2\sqrt{5}$

$\boxed{25}$ [Ⅰ. 2013 東京理科大　Ⅱ. 2009 慶応義塾大　Ⅲ. 2012 東京大]

Ⅰ．等式 $x^2-6xy+12y^2=1$ を満たす正の実数 x，y を考える。

(1)　$z=x+3y$ は $x=$ ア $\square$，$y=$ イ $\square$ のとき，最大値 ウ $\square$ をとる。

(2)　$z=xy$ は $x=$ エ $\square$，$y=$ オ $\square$ のとき，最大値 カ $\square$ をとる。

Ⅱ．座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ。　　(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ。

Ⅲ．座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

最大・最小問題 第2講

19

(1) [解1] 実数条件

$x+y=k$ とおくと

$y=k-x$

$x^2+y^2=2$ より

$x^2+(k-x)^2=2$

$2x^2-2kx+k^2-2=0$

xは実数より、判別式をDとすると

$D/4=k^2-2(k^2-2)$

$=-k^2+4\geqq 0$ $\therefore -2\leqq k\leqq 2$

より

最大値 $\boxed{2}$ 最小値 $\boxed{2}$

[解2] 線形計画法

$x+y=k$ とおく

これが $x^2+y^2=2$ と共有点をもつときの

kの最大・最小値をもとめればよい

[解3] 三角関数

$x^2+y^2=2$ より

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi) \end{cases}$$

とおける

$x+y=\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$

$=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ (合成)

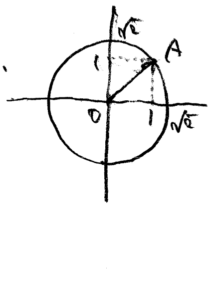
⋮

[解4] ベクトル(内積)

$\vec{OA}=\binom{1}{1}$, $\vec{OP}=\binom{x}{y}$ とすると

$x+y=\vec{OA}\cdot\vec{OP}$

$-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\leqq\vec{OA}\cdot\vec{OP}\leqq\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$



[解5] コーシー・シュワルツの不等式(内積)

$-|\vec{a}||\vec{b}|\leqq\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$ $\quad|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

等号成立は $\vec{a}\parallel\vec{b}$ のとき $\quad(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

$\vec{a}=\binom{a}{b}$, $\vec{b}=\binom{x}{y}$ とすると $\quad\vec{b}=k\vec{a}$

$(ax+by)^2\leqq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ …① $\quad\binom{x}{y}=k\binom{a}{b}$

等号成立は $ay-bx=0$ のとき $\quad\begin{cases}x=ka\\y=kb\end{cases}$

$\left(\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\right)$

①で $a=b=1$ とすると

$(x+y)^2\leqq 2(x^2+y^2)$

$(x+y)^2\leqq 4$

$\therefore -2\leqq x+y\leqq 2$

等号成立は

$x=y$ のとき

$x^2+y^2=2$ より

$2x^2=2$ $\therefore x=\pm 1$

このとき最大・最小値をとり

最大値 2、最小値 −2

[解6] 対称式

$x+y=k$, $xy=l$ とおく

$x^2+y^2=2$ より

$(x+y)^2-2xy=2$

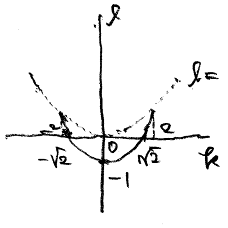
$k^2=2l+2$ $\therefore l=\frac{1}{2}k^2-1$

$t^2-(x+y)t+xy=0$

$t^2-kt+l=0$ は x, y を2解とする2次方程式である

x, yは実数であるから判別式をDとして $D\geqq 0$より

$D=k^2-4l\geqq 0$ $\therefore l\leqq\frac{k^2}{4}$



$l=\frac{1}{2}k^2-1$ と $l=\frac{k^2}{4}$ の共有点のk座標は

$\frac{1}{2}k^2-1=\frac{k^2}{4}$

$k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$

グラフより

$-2\leqq k\leqq 2$

$\therefore -2\leqq x+y\leqq 2$

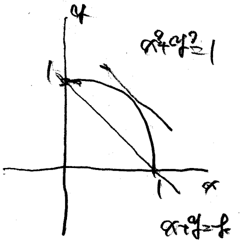
$\boxed{18}$

解) $x+y=k$ とおく

これが $x^3+y^3=1,\ x\geqq0,\ y\geqq0$ と

共有点をもつときのkの範囲

を求めればよい



$(1,0),(0,1)$を通るとき $k=1$

$x^3+y^3=1,\ x\geqq0,\ y\geqq0$ と $x+y=k$ が接するとき

$x^3+(k-x)^3=1$

$3kx^2-3k^2x+k^3-1=0$

$k=0$のときは解をもたないので $k\neq0$

判別式をDとすると $D=0$より

$9k^4-12k(k^3-1)=0$

$3k^4-12k=0$

$3k(k^3-4)=0 \quad \therefore k=\sqrt[3]{4}$

よって

$1\leqq x+y\leqq\sqrt[3]{4}$ //