$\boxed{58}$ [2024 津田塾大]

箱 A には赤玉1つと白玉1つが入っており，箱 B には白玉1つが入っている。
まず A から玉を1つ無作為に取り出し B に入れ，次に B から玉を1つ無作為に取り出し A に入れる。この操作を n 回繰り返した後，A に赤玉が入っている確率を p_n とする。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) p_n を n を用いて表せ。

$\boxed{59}$ [2023 金沢大]

K を自然数とする。2つの箱AとBがあり，Aに赤玉1個，Bに白玉 K 個が入っている。Aの中の1個の玉とBの中の1個の玉の交換を繰り返し行う。n 回目の交換が終わったときにAの中の玉が赤玉である確率を求めよ。

$\boxed{60}$ [2017 法政大]

A氏は毎朝，さいころを1回投げてから，その日に散歩をするかしないかを次の(i)，(ii)に従って決める。

(i) 前日に散歩をしたときは，さいころの出た目が3の倍数であればその日も散歩をし，3の倍数でなければその日は散歩をしない。

(ii) 前日に散歩をしなかったときは，さいころの出た目が奇数であればその日も散歩をせず，偶数であればその日は散歩をする。

A氏は昨日，散歩をした。今朝はまださいころを投げていない。このとき， A氏が今日散歩をする確率を p_1，明日散歩をする確率を p_2，明後日散歩をする確率を p_3，以下同様として p_n $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を定める。

(1) p_1，p_2，p_3 の値をそれぞれ求めよ。

(2) p_{n+1} と p_n の関係式を求めよ。

(3) p_n を n の式で表せ。

$\boxed{61}$ [2019 学習院大]

さいころを n 回投げるとき，6の目が出た回数を X とし，X が偶数である確率を P_n とする。

(1) P_1，P_2 を求めよ。

(2) P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

(3) P_n を求めよ。

$\boxed{62}$ [2015 中央大]

1個のさいころを繰り返し投げ，3の倍数の目が出る回数を数える。いま，さいころを n 回投げるとき，3の倍数の目が奇数回出る確率を P_n とする。

(1) P_2 および P_3 を求めよ。　(2) P_{n+1} を P_n で表せ。

(3) P_n を n の式で表せ。

$\boxed{63}$ [1997 神奈川大]

1つのさいころを n 回 $(n \geqq 1)$ 投げたとき，1の目の出る回数が偶数回である確率を p_n，奇数回である確率を q_n とする．ただし，0回は偶数回と考える．

(1) p_{n+1}, q_{n+1} を p_n, q_n で表せ．

(2) $p_n - q_n$ を n で表せ．

(3) p_n, q_n を n で表せ．

$\boxed{64}$ [2019 日本女子大]

1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードが入っている袋からカードを 1 枚取り出し，数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返し行うとき，n 回目までに出た n 個の数の合計を S_n とする。S_n が 3 で割り切れる確率を a_n とする。

(1)　a_1，a_2 を求めよ。　　(2)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

$\boxed{65}$ [2010 埼玉大]

各面に 1 から 8 までの数字が 1 つずつ書かれた正八面体のさいころを繰り返し投げ，n 回目までに出た数字の合計を $X(n)$ とする。$X(n)$ が 3 で割り切れる確率を a_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 1 余る確率を b_n，$X(n)$ を 3 で割ったとき 2 余る確率を c_n とする。ただし，1 から 8 までの数字の出る確率はどれも同じとする。

(1)　a_1，b_1，c_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+1} を a_n を用いて表せ。　　(4)　a_n，b_n，c_n を求めよ。

$\boxed{66}$ [1994 京都大]

さいころを n 回続けて投げるとき，k 回目に出る目の数を X_k とし，$Y_n=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ が 7 で割り切れる確率を p_n とする.

(1) p_n を p_{n-1} を用いて表せ.

(2) p_n を求めよ.

$\boxed{67}$ [2013 東北大]

袋の中に 1，2，3，4，5 の番号が 1 つずつ書かれた 5 つの玉が入っている。この中から無作為に 1 個の玉を取り出し，玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し，記録された数字の和が 3 の倍数になった時点で終了する。ただし，1 回目で 3 の倍数が出た場合は，その時点で終了とする。n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq3$ のとき，p_n を n の式で表せ。

$\boxed{68}$ [2012 千葉大]

さいころを n 回 $(n\geqq2)$ 投げ，k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{69}$ [2018 九州大]

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

$\boxed{70}$ [2014 大阪大]

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。

$\boxed{71}$ [2013 一橋大]

サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

$\boxed{72}$ [2018 琉球大]

2つの箱A，Bがあり，どちらの箱にも赤玉と白玉が1個ずつ入っている。それぞれの箱から，無作為に玉を1個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す。n 回の操作の後，箱A，Bのどちらにも赤玉，白玉が1個ずつ入っている確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　p_n を用いて p_{n+1} を表せ。

(3)　自然数 n に対して，p_n を求めよ。

$\boxed{73}$ [1999 一橋大]

2つの箱A，Bのそれぞれに赤玉が1個，白玉が3個，合計4個ずつ入っている．1回の試行で箱Aの玉1個と箱Bの玉1個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱Aに赤玉が1個，白玉が3個入っている確率 p_n を求めよ．

$\boxed{74}$ [2004 青山学院大]

1個のさいころを投げ，4以下の目が出ればボールの所有者が代わり，5以上の目が出れば代わらない，という規則にしたがって，最初Aが持っている1つのボールを，A，Bの2人の間で受け渡し合うものとする．

n 回サイコロを投げた後，A，Bがボールを持っている確率をそれぞれ a_n，b_n としたとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+1} と b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(2)　$c_n = a_n - b_n$ としたとき，c_{n+1} と c_n の関係式を求め，c_n を n の式で表せ．

(3)　a_n と b_n を n の式で表せ．

$\boxed{75}$ [2017 津田塾大]

3個の箱A，B，Cがあり，ボールが1個ずつ入っている。コインを投げて表が出れば箱Aのボールと箱Bのボールを交換し，裏が出れば箱Bのボールと箱Cのボールを交換する試行を繰り返す。最初に，箱Aには赤いボールが，箱Bには白いボールが，箱Cには赤いボールが入っているものとして，この試行を n 回繰り返したとき，白いボールが箱Aに入っている確率 a_n，箱Bに入っている確率 b_n，箱Cに入っている確率 c_n をそれぞれ求めよ。

$\boxed{76}$ [2012 大阪市立大]

三角形 ABC の頂点 A，B，C は反時計回りに並んでいるものとする。点 P はいずれかの頂点の位置にあり，1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする。点 P は最初，頂点 A の位置にあったとする。硬貨を n 回投げたとき，点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す。

(1)　$n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ。

(2)　a_n を求めよ。

$\boxed{77}$ [2020 大阪大]

円周を 3 等分する点を時計回りに A，B，C とおく。点 Q は A から出発し，A，B，C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げた後に Q が A に位置する確率を p_n とする。

(1)　p_2 を求めよ。　　(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

$\boxed{78}$ [2009 和歌山県立医科大]

正方形の頂点を順に A，B，C，D とし，この順を正の向きとし，逆を負の向きとする。動点 P は常に頂点にあり，1 秒ごとに次の頂点に移っていく。このとき，正の向きに次の頂点に移る確率は $\dfrac{2}{3}$ で，逆の負の向きに次の頂点に移る確率は $\dfrac{1}{3}$ とする。また，動点 P は最初頂点 A にあるものとする。

(1)　2 秒後に動点 P が頂点 A，C にある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　3 秒後に動点 P が頂点 B，D にある確率をそれぞれ求めよ。

(3)　4 以上の自然数 n に対して，n 秒後に動点 P が各頂点にある確率をそれぞれ求めよ。

$\boxed{79}$ [1998 名古屋大]

座標平面上に 4 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 0)$，C$(1,\ 0)$，D$(1,\ 1)$ を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．更に，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A，C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．a_n，c_n を求めよ．

$\boxed{80}$ [2000 工学院大]

四面体 OABC の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 つの頂点に達してから 1 秒後に，他の 3 つの頂点のいずれかにおのおの確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．頂点 O にいた点 P がそれから n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．

(1)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2)　p_n を求めよ．

$\boxed{81}$ [1996 富山大]

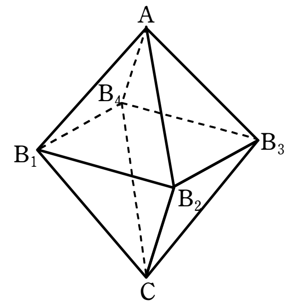
正四面体 ABCD の 4 つの頂点を移動する点 P がある．点 P がいずれの頂点にあるときも 1 ステップ後に同じ頂点にとどまる確率は $\frac{2}{5}$ であり，他の頂点に移動する確率はいずれも $\frac{1}{5}$ である．頂点 A から出発した点 P が n ステップ後に頂点 A にある確率を a_n，頂点 B にある確率を b_n とする．ただし，$a_0=1, b_0=0$ とする．

(1)　a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(3)　a_{n+2}, a_{n+1}, a_n の関係式を導き，a_n, b_n を求めよ．

$\boxed{82}$ [2006 札幌医科大]



右の図の正八面体 $AB_1B_2B_3B_4C$ の頂点 A を出発し，1 回ごとに等確率で隣りの頂点のいずれかに移動する点 X がある。

例えば n 回目の移動後に点 X が頂点 B_1 にいたとすると $n+1$ 回目には頂点 A，B_2，B_4，C のいずれかに，それぞれ $\frac{1}{4}$ の確率で移動する。

n 回目の移動後に，点 X が頂点 A にいる確率を a_n，頂点 B_1，B_2，B_3，B_4 のいずれかにいる確率を b_n，頂点 C にいる確率を c_n とする ($n \geqq 1$)。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて，それぞれ表せ。

(2)　$p_n=b_{n+1}-b_n$ とおき，p_n を n の式で表せ。

(3)　b_n を n の式で表せ。

さて，点 X が頂点 A を出発するのと同時に，頂点 C を出発する点 Y があり，点 X が移動するごとに点 Y も同時に等確率で隣りの頂点のいずれかに移動するものとする。

(4)　n 回目の移動後に，点 X が頂点 B_1，B_2，B_3，B_4 にいる確率はどれも $\frac{b_n}{4}$ に等しいことを用いて，n 回目の移動後に点 X と Y が同じ頂点にいる確率を求めよ。

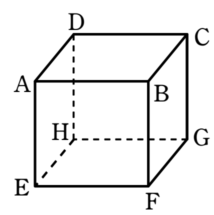
$\boxed{83}$ [2007 京都大]

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{84}$ [2017 名古屋大]



右図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，

(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

85 [2015 横浜市立大]

数直線上の原点 O を出発点とする。硬貨を投げるたびに，表が出たら 2，裏が出たら 1 だけ正の方向へ進むものとする。点 n に到達する確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。

(1)　3 以上の n について，p_n，p_{n-1}，p_{n-2} の関係式を求めよ。

(2)　3 以上の n について，p_n を求めよ。

86 [福井医科大]

座標平面上で点 P を次の規則に従って移動させる．すなわち，1 個のさいころを振り，出た目を a とするとき，$a \leqq 2$ ならば x 軸の正の方向へ a だけ，また，$a \geqq 3$ ならば y 軸の正の方向へ 1 だけ移動させる．いま原点を出発点として，さいころを繰り返し振り点 P を順次移動させるものとする．

このとき，自然数 n に対し，点 P が $(n, 0)$ に到着する確率を p_n とおき，$p_0=1$ とすると

$p_1=\boxed{}$

$p_{n+1}=\boxed{}p_n+\boxed{}p_{n-1}\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

である．したがって，$p_n=\boxed{}$ である．

87 [2018 早稲田大]

点 P は，数直線上の点 1 から出発し，さいころの出る目が 1，2，3，4 ならば $+1$ だけ，5，6 ならば -1 だけ動く。この試行を繰り返し，点 P が点 0 または点 5 に到達したときに試行は終了するものとする。点 P が点 5 に到達して終了する確率を求めよ。

88 [1997 慶応義塾大]

太郎君は 2 円，花子さんは 3 円持っている．いま，次のようなゲームをする．じゃんけんをし，太郎君が勝ったならば花子さんから 1 円をもらえ，太郎君が負けたならば花子さんに 1 円を支払う．ただし，太郎君がじゃんけんに勝つ確率は $\dfrac{2}{5}$ であり，どちらかの所持金が 0 となったときにその者が敗者となりゲームは終わる．A_n を太郎君の所持金が n 円となったときからスタートし，花子さんの所持金が 0 となる確率とすると，$A_0=0, A_5=$ ア$\boxed{}$ である．このとき $A_n=$ イ$\boxed{}A_{n+1}+$ ウ$\boxed{}A_{n-1}, 1 \leqq n \leqq 4$ が成立する．よって，$A_{n+1}-A_n=$ エ$\boxed{}(A_n-A_{n-1})$ である．このことから，$A_5=$ オ$\boxed{}A_1$ および $A_2=$ カ$\boxed{}A_1$ が得られる．よって，このゲームで太郎君が勝つ確率は キ$\boxed{}$ である．

89 [茨城大]

自然数 n に対して，$a_n=2^n+3^n+1$ とおくとき，

(1) $a_{n+6}-a_n$ は 7 で割り切れることを示せ.

(2) n が 6 の倍数のとき，a_n は 7 で割り切れないことを示せ.

(3) a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ.

90 [2018 神戸大]

n を自然数とする。$A_n=2^n+n^2$，$B_n=3^n+n^3$ とおく。A_n を 3 で割った余りを a_n とし，B_n を 4 で割った余りを b_n とする。

(1) $A_{n+6}-A_n$ は 3 で割り切れることを示せ。

(2) $1\leqq n\leqq 2018$ かつ $a_n=1$ を満たす n の個数を求めよ。

(3) $1\leqq n\leqq 2018$ かつ $b_n=2$ を満たす n の個数を求めよ。

91 [2011 岡山大]

数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{ が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_{10} を求めよ。

(2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(3) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{92}$ [2011 首都大学東京]

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする。

$$\begin{cases} a_1=4,\ b_1=3 \\ a_{n+1}=4a_n-3b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

(1)　a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4 を求めよ。

(2)　$a_{n+4}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$, $b_{n+4}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ はともに 5 の倍数であることを証明せよ。

(3)　a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ も b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ も 5 の倍数ではないことを証明せよ。

$\boxed{93}$ [2009 横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を $a_1=3$, $b_1=8$, $c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める。

(1)　b_n を n の式で表せ。

(2)　$a_{n+3}-a_n$ は 7 で割り切れることを示し，a_n が 7 で割り切れるための n の条件を求めよ。

$\boxed{94}$ [2023 愛媛大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n{}^2+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。m を自然数とするとき，a_{2m} は 6 の倍数であることを示せ。

$\boxed{95}$ [2018 大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n{}^2+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して，a_{3n} は 5 で割り切れることを示せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}-1$ は 5 で割り切れることを示せ。

$\boxed{96}$ [2010 県立広島大]

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=7a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。

(1)　a_{n+3} を a_n, a_{n+1} で表せ。

(2)　a_{3n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が偶数であることを数学的帰納法で証明せよ。

(3)　a_{4n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が3の倍数となることを示せ。

$\boxed{97}$ [大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ で定める.

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を示せ.

(3) 任意の自然数 n に対して, a_n は整数であり, a_{4n} は3の倍数であることを示せ.

$\boxed{98}$ [1993 東京大]

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ で定める. a_n が偶数となる n を決定せよ.

$\boxed{99}$ [熊本大]

$a_1=a_2=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\,(n\geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について,

(1) $n=3, 4, \cdots\cdots, 9$ に対して a_n の値を求めよ.

(2) n が3の倍数ならば a_n は偶数であり, n が3の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ.

$\boxed{100}$［2012 京都大］

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，……，X_n とする。さらに

$$Y_1=X_1,\ Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，……，Y_n を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

$\boxed{101}$［2015 京都大］

2 つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1$，2，…… について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。

このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

$\boxed{102}$［2016 愛媛大］

$f(x)=\dfrac{x}{2}$，$g(x)=x$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=1$ とし，2 枚の硬貨を繰り返して投げ，n 回目の事象により x_n を次のように定める。

$$x_n=\begin{cases} f(x_{n-1}) & (\text{2 枚とも表のとき}) \\ g(x_{n-1}) & (\text{1 枚が表，1 枚が裏のとき}) \\ h(x_{n-1}) & (\text{2 枚とも裏のとき}) \end{cases}$$

また p_n，q_n，r_n をそれぞれ $0<x_n\leqq\dfrac{1}{3}$ である確率，$\dfrac{1}{3}<x_n\leqq\dfrac{2}{3}$ である確率，$\dfrac{2}{3}<x_n\leqq 1$ である確率とする。

(1)　すべての自然数 n に対して $0<x_n\leqq 1$ を示せ。

(2)　p_1，q_1，r_1 を求めよ。

(3)　p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(4)　p_n-r_n を求めよ。

(5)　p_n を求めよ。

103 [2022 同志社大]

最初，袋 A，袋 B のどちらの袋にも，赤玉 1 個と白玉 4 個が入っている。「袋 A と袋 B からそれぞれ玉を 1 個無作為に取り出して，袋 A から取り出した玉は袋 B に入れ，袋 B から取り出した玉は袋 A に入れる」という試行を続けて行う。n を自然数とし，n 回目の試行が終わったとき，袋 A に赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている確率を p_n とおく。

$p_1=$ ア $\boxed{}$，$p_2=$ イ $\boxed{}$ である。p_{n+1} を p_n で表すと，$p_{n+1}=$ ウ $\boxed{}\,p_n+$ エ $\boxed{}$ となる。これより，$\lim_{n\to\infty} p_n=$ オ $\boxed{}$ である。

104 [2016 名古屋大]

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

105 [2016 同志社大]

箱から玉を 1 個取り出し，この玉に 1 個の玉を新たに加えた合計 2 個の玉を箱に戻す試行を繰り返す。新たに加える玉の色は白あるいは黒のみとする。最初に，2 個の白玉と 3 個の黒玉が入っている箱を考える。新たに加える玉の色は取り出した玉と同色とすると，3 回目の試行において白玉を取り出す確率は ア $\boxed{}$，n 回目の試行において白玉を取り出す確率 P_n は イ $\boxed{}$，極限 $\lim_{n\to\infty} P_n$ は ウ $\boxed{}$ である。次に，3 個の白玉と 4 個の黒玉が入っている箱を考える。新たに加える玉の色は取り出した玉と異なる色とすると，3 回目の試行において白玉を取り出す確率は エ $\boxed{}$ である。n 回目の試行において白玉を取り出す確率を Q_n とすると，Q_n は漸化式 $Q_n=$ オ $\boxed{}\,Q_{n-1}+\dfrac{1}{6+n}$ $(n\geqq 2)$ を満たし，極限 $\lim_{n\to\infty} Q_n$ は カ $\boxed{}$ である。

106 [2010 名古屋大]

初めに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ 繰り返した後に A，B，C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ。

107 [京都大]

A, B, C の 3 人が色のついた札を 1 枚ずつ持っている．はじめに，A, B, C の持っている札の色はそれぞれ赤，白，青である．

A がさいころを投げて，3 の倍数の目が出たら A は B と持っている札を交換し，その他の目が出たら A は C と札を交換する．

この試行を n 回繰り返した後に，赤い札を A, B, C が持っている確率を，それぞれ a_n, b_n, c_n とする．

(1) $n\geqq 2$ のとき，a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ で表せ．

(2) a_n を求めよ．

108 [2011 一橋大]

AとBの2人が，1個のさいころを次の手順により投げあう。

1回目はAが投げる。

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1) n 回目にAがさいころを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のさいころ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のさいころ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ。

109 [2013 名古屋大]

3人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n，3人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

110 [2021 中央大]

コインを繰り返し投げ，連続した3回が順に，表→裏→表，あるいは，裏→表→裏，というパターンが出たときにコイン投げを終了する。$n \geqq 3$ に対し，コインをちょうど n 回投げて終了する確率を p_n とする。次の手順により p_n を求める。

コインを n 回投げて「まだ終了していないが $n+1$ 回目に表が出たら終了する」または「まだ終了していないが $n+1$ 回目に裏が出たら終了する」という状態にある確率を r_n とする。また，コインを n 回投げて「まだ終了しておらず，$n+1$ 回目に表が出ても裏が出ても終了しない」という状態にある確率を s_n とする。このとき，$r_3=\dfrac{1}{4}$，$s_3=$ ア $\boxed{}$，$r_4=\dfrac{1}{4}$，$s_4=$ イ $\boxed{}$ である。ここで，r_{n+1} と s_{n+1} を r_n，s_n を用いて表すと，それぞれ $r_{n+1}=$ ウ $\boxed{}$，$s_{n+1}=$ エ $\boxed{}$ となる。これらにより s_n の3項間の漸化式が得られる。

この3項間の漸化式は，$\alpha<\beta$ として

$$s_{n+2}-\alpha s_{n+1}=\beta(s_{n+1}-\alpha s_n),\quad s_{n+2}-\beta s_{n+1}=\alpha(s_{n+1}-\beta s_n)$$

の形で表すことができる。この α，β はそれぞれ $\alpha=$ オ $\boxed{}$，$\beta=$ カ $\boxed{}$ である。

上の第1式を計算すると，$s_{n+2}-\alpha s_{n+1}=$ キ $\boxed{}\beta^{n-2}=\beta^{ク\boxed{}}$ となる。第2式についても同様に計算し，これらを連立して解くと，s_n の一般項が $s_n=$ ケ $\boxed{}(\beta^n-\alpha^n)$ $(n \geqq 3)$ となることがわかる。よって，p_n の一般項は $p_n=$ コ $\boxed{}(\beta^{n-2}-\alpha^{n-2})$ $(n \geqq 3)$ となる。

111 [2003 神戸大]

数列 $\{a_n\}$ は，条件 $a_1=7$，$a_{n+1}=(a_n)^3$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ によって定められるとする．n を自然数とするとき，a_n を 3^n で割ったときの余りが1になることを数学的帰納法によって証明せよ．

112 [2024 上智大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$a_1=2, a_{n+1}=a_n{}^2+a_n+1\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1) a_n-2 は5で割り切れることを証明せよ。

(2) $a_n{}^2+1$ は 5^n で割り切れることを証明せよ。

113 [2003 神戸大]

数列 $\{a_n\}$ は，条件 $a_1=7$，$a_{n+1}=(a_n)^6$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ によって定められている．n を自然数とするとき，a_n を 6^n で割ったときの余りが1になることを，数学的帰納法によって証明せよ．

114 [1999 上智大]

漸化式 $a_1=4, a_{n+1}=3a_n{}^2+4a_n+3\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$ で定まる整数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1) a_n-4 が7で割り切れることを証明せよ．

(2) $a_n{}^2+a_n+1$ が 7^n で割り切れることを証明せよ．

(3) 正整数 p について，$a_n{}^{3p}$ を 7^n で割った余りを求めよ．