

第3章 積分法の応用

3.1 面積(1)

(1) 曲線 $y=f(x)$ で定まる図形の面積

既に学んだように、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、および2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S については、 $a < b$ のとき、次のことが成り立つ。

面積 1

1. 区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき、 $S = \int_a^b f(x) dx$

2. 区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \leq 0$ のとき、 $S = -\int_a^b f(x) dx$

例1

$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ を考える。

(1) $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= 2\cos x - 2\cos 2x \\ &= 2\{\cos x - (2\cos^2 x - 1)\} \\ &= -2(2\cos x + 1)(\cos x - 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } \cos x = -\frac{1}{2}, 1 \quad \therefore x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$f(x)$ の増減表は下図

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0

よって

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$x = \frac{4}{3}\pi$ のとき最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる

$$(2) f(x) = 2\sin x - 2\sin x \cos x = 2\sin x(1 - \cos x)$$

$$f(x) = 0 \text{ とすると, } \sin x = 0, \cos x = 1 \quad \therefore x = 0, \pi, 2\pi$$

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi f(x) dx - \int_\pi^{2\pi} f(x) dx \\ &= \left[-2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^\pi - \left[-2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_\pi^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

〔注〕面積を求めるには, ある区間で $f(x) \geq 0$ か $f(x) \leq 0$ かが分かればよい。

本問では増減を調べているが, $f(x) = 2\sin x(1 - \cos x)$ であり,

$1 - \cos x \geq 0$ であるから, $f(x)$ の符号はすぐに分かります。

(2) 曲線 $x = f(y)$ で定まる図形の面積

区間 $a \leq y \leq b$ で常に $g(y) \geq 0$ のとき, 曲線 $x = g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y = a, y = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると, 次のことが成り立つ。

$$S = \int_a^b g(y) dy$$

例2

$a \neq 0$ とし, 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 (e^a, a) における接線を l とする。ただし, 対数は自然対数である。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l , y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた三角形の面積を S_1 とする。また, 曲線 C , x 軸, y 軸および直線 $y = a$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となる a の値を求めよ。

解説

$$(1) f(x) = \log x \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{1}{x}$$

C 上の点 (e^a, a) における接線の方程式は

$$y - a = f'(e^a)(x - e^a)$$

$$y - a = \frac{1}{e^a}(x - e^a) \quad \therefore y = \frac{1}{e^a}x + a - 1$$

$$(2) S_1 = \frac{1}{2} e^a \{a - (a-1)\} = \frac{1}{2} e^a$$

$y = \log x$ から, $x = e^y$ より

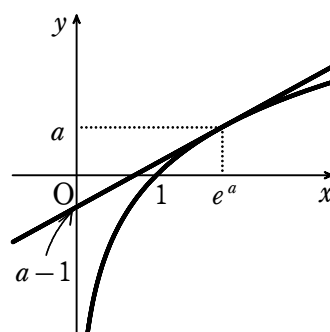
(i) $a > 0$ のとき

$$S_2 = \int_0^a e^y dy = \left[e^y \right]_0^a = e^a - 1$$

$S_1 = S_2$ より

$$\frac{1}{2} e^a = e^a - 1$$

$$e^a = 2 \quad \therefore a = \log 2$$



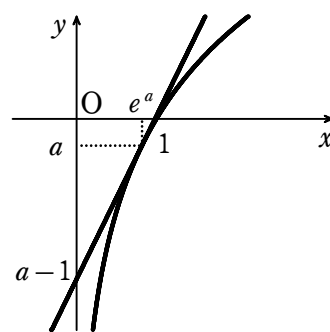
(ii) $a < 0$ のとき

$$S_2 = \int_a^0 e^y dy = \left[e^y \right]_a^0 = 1 - e^a$$

$S_1 = S_2$ より

$$\frac{1}{2} e^a = 1 - e^a$$

$$e^a = \frac{2}{3} \quad \therefore a = \log \frac{2}{3}$$



(i), (ii)より

$$a = \log 2, \log \frac{2}{3}$$

2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と2直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積 S についても, $a < b$ のとき次のことが成り立つことを, 既に学んでいる。

面積 2

区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq g(x)$ のとき, $S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$

例3

平面上で2つの曲線 $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ を考える。

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $y = \sin x$ と $y = \cos 2x$ の共有点を求めよ。

(2) 2つの曲線 $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ と2つの直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

解説

(1) $\sin x = \cos 2x$ より

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1, \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$$

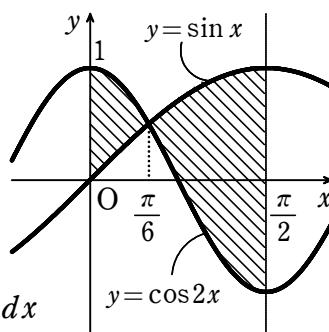
よって、求める共有点の座標は $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

(2) 2曲線 $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ と2直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ の位置関係は右図

求める面積 S は斜線部の面積より

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$$

**例4**

曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれる部分の面積を曲線 $y = k \sin \frac{x}{2}$ が2等分するように k の値を求めよ。

解説

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) と x 軸とで囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

$y = \sin x$ と $y = k \sin \frac{x}{2}$ の原点以外の交点の x 座標を α ($0 < \alpha < \pi$) とすると、

$$\sin \alpha = k \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = k \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0 \text{ より, } k = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

よって, $0 < k < 2$

曲線 $y = \sin x$ と $y = k \sin \frac{x}{2}$ とで囲まれる部分の面積 S' は

$$S' = \int_0^{\alpha} \left(\sin x - k \sin \frac{x}{2} \right) dx = \left[-\cos x + 2k \cos \frac{x}{2} \right]_0^{\alpha}$$

$$= -\cos \alpha + 2k \cos \frac{\alpha}{2} - (-1 + 2k)$$

$$= 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2k \cos \frac{\alpha}{2} + 1 - 2k$$

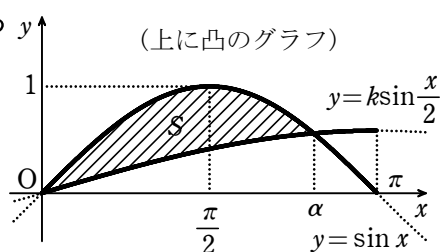
$$= 1 - \frac{k^2}{2} + k^2 + 1 - 2k = \frac{k^2}{2} - 2k + 2$$

$S' = \frac{1}{2} S = 1$ となればよいから

$$\frac{k^2}{2} - 2k + 2 = 1$$

$$k^2 - 4k + 2 = 0$$

$0 < k < 2$ より, $k = 2 - \sqrt{2}$



例5

e は自然対数の底 2.7182818 を表す.

- (1) 方程式 $\frac{e^x-1}{e-1} - x = 0$ の解は 0, 1 のみであることを証明せよ.
- (2) 関数 $y = \frac{e^x-1}{e-1}$ のグラフとその逆関数のグラフとで囲まれる図形の面積を求めよ.

解説

(1) $f(x) = \frac{e^x-1}{e-1} - x$ とおくと, $f(0) = f(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e-1} - 1 = \frac{e^x - (e-1)}{e-1}$$

$f'(x) = 0$ とすると, $x = \log(e-1)$

$1 < e-1 < e$ より, $0 < \log(e-1) < 1$

関数 $f(x)$ は

$x \leq \log(e-1)$ において単調減少

$\log(e-1) \leq x$ において単調増加

よって, $f(x) = 0$ の解は 0, 1 のみである

(2) $y = \frac{e^x-1}{e-1}$ とその逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して対称で,

(1)より $x=0, 1$ で交わるから, 求める面積 S は

$$S = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{e^x-1}{e-1} \right) dx = 2 \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{e^x-x}{e-1} \right]_0^1 = \frac{3-e}{e-1}$$

例6

原点を通り曲線 $y = 2 + \log x$ に接する直線を l とする.

- (1) 直線 l の方程式を求めよ.
- (2) l と曲線 $y = 2 + \log x$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

解説

(1) $f(x)=2+\log x$ とおくと, $f'(x)=\frac{1}{x}$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(2+\log t)=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$y=\frac{1}{t}x+1+\log t$$

これが原点を通るとき

$$1+\log t=0 \quad \therefore t=\frac{1}{e}$$

よって, 直線 l の方程式は $y=ex$

(2) $y=2+\log x$ より

$$\log x=y-2 \quad \therefore x=e^{y-2}$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1 e^{y-2} dy - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e^2} [e^y]_0^1 - \frac{1}{2e} = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right)$$

別解

$y=2+\log x$ と x 軸の交点の座標は,

$$2+\log x=0 \quad \therefore x=\frac{1}{e^2}$$

求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2} \times \frac{1}{e} \times 1 - \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} (2+\log x) dx = \frac{1}{2e} - \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} (2+\log x) dx$$

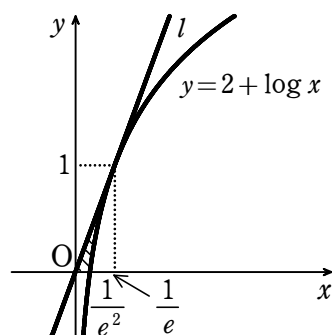
ここで,

$$\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} (2+\log x) dx = 2 \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} 1 dx + \left[x \log x \right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} - \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} 1 dx$$

$$= \left[x \right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} + \left(\frac{1}{e} \log \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \log \frac{1}{e^2} \right) = \frac{1}{e^2}$$

より

$$S=\frac{1}{2e} - \frac{1}{e^2}$$



例7

2つの曲線 $C_1: y = \log x$, $C_2: y = a\sqrt{x}$ について、次の問いに答えよ。
ただし、 a は正の定数である。

- (1) C_1 上の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 が共有点をもち、その共有点において共通の接線をもつとき、定数 a の値とその共有点の座標を求めよ。
- (3) 定数 a が (2) で求めた値のとき、 C_1 , C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解説

$$(1) f(x) = \log x \text{ とおくと, } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$y = f(x)$ 上の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式は

$$y - \log t = f'(t)(x - t)$$

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

$$(2) g(x) = a\sqrt{x} \text{ とすると, } g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が $x = t$ で共通接線をもつとき

$$f(t) = g(t) \text{ より, } \log t = a\sqrt{t} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{ より, } \frac{1}{t} = \frac{a}{2\sqrt{t}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } a = \frac{2}{\sqrt{t}}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \log t = \frac{2}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} \quad \log t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

$$\text{このとき, } a = \frac{2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$$

共有点の座標は $(e^2, 2)$

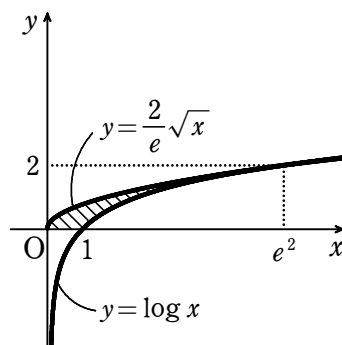
(3) (2) より, $g(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x}$

$\log x \leq \frac{2}{e}\sqrt{x}$ より, 求める面積を S とすると,

S は右図の斜線部の面積より

$$S = \int_0^{e^2} \frac{2}{e}\sqrt{x} dx - \int_1^{e^2} \log x dx$$

$$= \left[\frac{2}{e} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{e^2} - \left[x \log x - x \right]_1^{e^2} = \frac{1}{3}e^2 - 1$$



別解

$y = \frac{2}{e}\sqrt{x}$ より, $x = \frac{e^2}{4}y^2$ ($y \geq 0$)

$y = \log x$ より, $x = e^y$

よって

$$S = \int_0^2 \left(e^y - \frac{e^2}{4}y^2 \right) dy = \frac{1}{3}e^2 - 1$$

例8

座標平面内の2つの曲線

$$C_1: y = \log(2x),$$

$$C_2: y = 2\log x$$

の共通接線を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) C_1 , C_2 および ℓ で囲まれる領域の面積を求めよ。

解説

(1) $f(x) = \log 2x$ とおくと, $f'(x) = \frac{1}{x}$

$y = f(x)$ 上の点 $(s, \log 2s)$ における接線の方程式は

$$y - \log(2s) = \frac{1}{s}(x - s) \quad \therefore y = \frac{1}{s}x + \log(2s) - 1$$

$g(x) = 2\log x$ とおくと, $g'(x) = \frac{2}{x}$

$y = g(x)$ 上の点 $(t, 2\log t)$ における接線の方程式は

$$y - 2\log t = \frac{2}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{2}{t}x + 2\log t - 2$$

これらが一致するとき

$$\frac{1}{s} = \frac{2}{t} \dots \textcircled{1}, \quad \log(2s) - 1 = 2\log t - 2 \dots \textcircled{2}$$

①より, $t = 2s$

②より

$$\log t - 1 = 2\log t - 2$$

$$\log t = 1 \quad \therefore t = e$$

このとき, $s = \frac{e}{2}$

よって, 共通接線 ℓ の方程式は $y = \frac{2}{e}x$

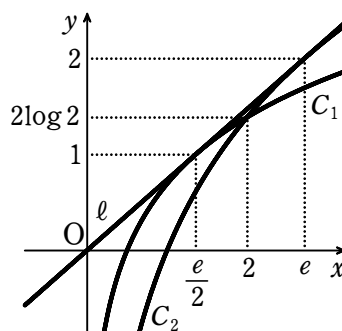
(2) $\log(2x) = 2\log x$ とすると

$$\log x = \log 2 \quad \therefore x = 2$$

2 曲線 C_1 , C_2 の共有点の x 座標は, $x = 2$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(1+2)\left(e - \frac{e}{2}\right) - \int_{\frac{e}{2}}^2 \log(2x) dx - \int_2^e 2\log x dx \\ &= \frac{3}{4}e - \int_{\frac{e}{2}}^2 \log(2x) dx - \int_2^e 2\log x dx \end{aligned}$$



ここで

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log(2x) dx &= \int (\log x + \log 2) dx \\ &= x \log x - x + (\log 2)x + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから

$$\int_{\frac{e}{2}}^2 (\log 2x) dx = \left[x \log x - x + (\log 2)x \right]_{\frac{e}{2}}^2 = 4\log 2 - 2$$

$$\int_2^e \log x dx = \left[x \log x - x \right]_2^e = -2\log 2 + 2$$

$$\text{より, } S = \frac{3}{4}e - (4\log 2 - 2) - 2(-2\log 2 + 2) = \frac{3}{4}e - 2$$

別解

$$y = \log 2x \text{ より, } x = \frac{e^y}{2}$$

$$y = 2\log x \text{ より, } x = e^{\frac{y}{2}}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{2\log 2} \frac{e^y}{2} dy + \int_{2\log 2}^2 e^{\frac{y}{2}} dy - \frac{3}{4}e \\ &= \frac{1}{2} \left[e^y \right]_1^{2\log 2} + \left[2e^{\frac{y}{2}} \right]_{2\log 2}^2 - \frac{3}{4}e \\ &= \frac{1}{2}(4 - e) + 2(e - 2) - \frac{3}{4}e = \frac{3}{4}e - 2 \end{aligned}$$

(3) 面積の 2 等分

例9

関数 $f(x) = |x-3|\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) について

- (1) 関数 $f(x)$ の増減表を書き, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
(2) $0 \leq x \leq 3$ において曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_1 とし, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = \alpha$ ($\alpha \geq 3$) とで囲まれた部分の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ を満たす α の値および面積 S_1 を求めよ。

解説

(1) (i) $0 < x < 3$ のとき

$$f(x) = -(x-3)\sqrt{x} = -x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$$

(ii) $3 < x$ のとき

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x} = x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

(iii) $f(0) = f(3) = 0$

(i) ~ (iii) より, $f(x)$ の増減表は下図

x	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	/	+	0	-	/	+
$f(x)$	0	↗	2	↘	0	↗

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f'(x) = -\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f'(x) = \sqrt{3} \text{ より}$$

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図

(2) $S_1=S_2$ より

$$\int_0^3 (-x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}) dx = \int_3^\alpha (x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx$$

$$\int_0^3 (x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx + \int_3^\alpha (x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx = 0$$

$$\int_0^\alpha (x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}) dx = 0$$

$$\frac{2}{5} \alpha^2 \sqrt{\alpha} - 2\alpha \sqrt{\alpha} = 0$$

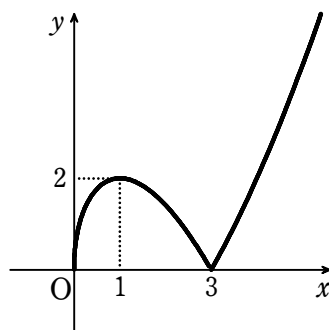
$$\frac{2}{5} \alpha \sqrt{\alpha} (\alpha - 5) = 0$$

$\alpha \geq 3$ より, $\alpha = 5$

また

$$S_1 = \int_0^3 (-x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}) dx = \left[-\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot 9\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{5}$$



例10

C を曲線 $y=\log x$ とし, 実数 k を $0 < k < 1$ とする. C と 2 直線 $x=1$, $y=k$ によって囲まれた部分の面積を $S_1(k)$ とし, C と 2 直線 $x=e$, $y=k$ によって囲まれた部分の面積を $S_2(k)$ とする.

(1) $S_1(k)$ と $S_2(k)$ を k で表せ.

(2) $S_1(k)=S_2(k)$ となる k の値を求めよ.

(3) $S_1(k)+S_2(k)$ が最小となる k の値を求めよ.

解説

(1) $\log x = k$ とすると, $x = e^k$

$$S_1(k) = k(e^k - 1) - \int_1^{e^k} \log x dx$$

$$\int_1^{e^k} \log x dx = \left[x \log x \right]_1^{e^k} - \int_1^{e^k} x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= ke^k - \left[x \right]_1^{e^k} = (k-1)e^k + 1 \text{ より}$$

$$S_1(k) = k(e^k - 1) - \{(k-1)e^k + 1\} = e^k - k - 1$$

$$S_2(k) = \int_{e^k}^e \log x dx - k(e - e^k)$$

$$\int_{e^k}^e \log x dx = \left[x \log x \right]_{e^k}^e - \left[x \right]_{e^k}^e = e - ke^k - (e - e^k) = (1-k)e^k \text{ より}$$

$$S_2(k) = (1-k)e^k - k(e - e^k) = e^k - ek$$

(2) (1)より

$$e^k - k - 1 = e^k - ek \quad \therefore k = \frac{1}{e-1}$$

別解

$$S_1(k) = S_2(k) \text{ より}$$

$$\int_1^{e^k} (k - \log x) dx = \int_{e^k}^e (\log x - k) dx$$

$$\int_1^{e^k} (\log x - k) dx = 0$$

$$\left[x \log x - x - kx \right]_1^{e^k} = 0$$

$$-ek + 1 + k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{e-1}$$

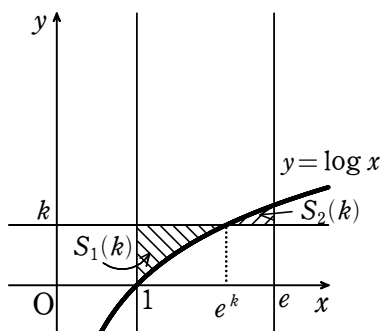
(3) $f(k) = S_1(k) + S_2(k)$ とおくと, $f(k) = 2e^k - (e+1)k - 1$

$f'(k) = 2e^k - (e+1) = 0$ とすると

$$e^k = \frac{e+1}{2} \quad \therefore k = \log \frac{e+1}{2}$$

$f(k)$ の増減表は右図

$k = \log \frac{e+1}{2}$ のとき, $f(k)$ は極小かつ最小



k	0	...	$\log \frac{e+1}{2}$	...	1
$f'(k)$		-	0	+	
$f(k)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

補1

(1) 座標平面上の点 (x, y) を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる点の座標を (x', y') とする。 x', y' を x, y を用いて表せ。

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に点 $A(a, \sqrt{a^2 - 1})$ ($a > 1$) をとる。原点 $O(0, 0)$ と結んだ線分 OA と双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 S が

$$S = \frac{1}{2} \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

と表されることを示せ。

(解説)

(1) 点 $x + yi$ を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を $x' + y'i$ とすると

$$\begin{aligned} x' + y'i &= (x + yi) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x + yi)(1 + i) = \frac{x - y}{\sqrt{2}} + \frac{x + y}{\sqrt{2}} i \end{aligned}$$

x, y, x', y' は実数より

$$x' = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$$

(2) (1)より

$$x - y = \sqrt{2} x', \quad x + y = \sqrt{2} y' \quad \therefore x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$$

$x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \quad \therefore x' y' = \frac{1}{2}$$

よって、求める方程式は

$$xy = \frac{1}{2}$$

(3) 点 $A(a, \sqrt{a^2-1})$ ($a>1$) を原点の周りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を A'

とすると,

$$A' \text{ の座標 } \left(\frac{a - \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}, \frac{a + \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}} \right)$$

求める面積 S は図の斜線部

図の斜線部の面積は

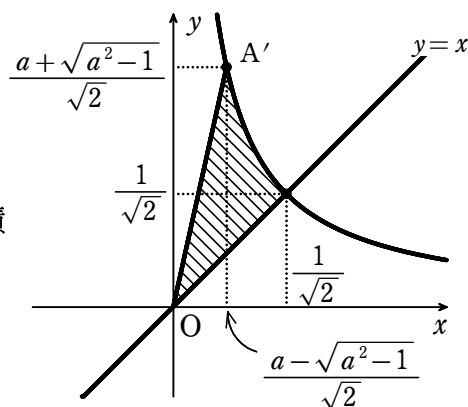
$$\frac{a - \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ において}$$

$xy = \frac{1}{2}$ と x 軸とで囲まれる部分の面積

に等しいから

$$S = \int_{\frac{a - \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \log x \right]_{\frac{a - \sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \log (a + \sqrt{a^2-1})$$



補2

以下の問いに答えよ.

(1) $I = \int e^{-x} \sin x dx$, $J = \int e^{-x} \cos x dx$ とおくとき, I および J に部分積分法を用いて, $I+J$ と $I-J$ を求めよ.

(2) 座標平面上の $0 \leq x \leq n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の範囲において, 曲線 $y=e^{-x} \sin x$ と x 軸とで囲まれた n 個の部分の面積の総和を S_n とする. S_n と $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= -e^{-x} \sin x - \int (-e^{-x})(\sin x)' dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \\ &= -e^{-x} \sin x + J \end{aligned}$$

$$J = \int (-e^{-x})' \cos x dx = -e^{-x} \cos x + \int e^{-x} (-\sin x) dx = -e^{-x} \cos x - I$$

よって

$$I+J = -e^{-x} \cos x + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

$$I-J = -e^{-x} \sin x + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

$$(2) (1) \text{ より, } I = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)$$

$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ ($k=0, 1, 2, \dots$) の部分で $y=e^{-x} \sin x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を a_k とすると

$$\begin{aligned} a_k &= \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \right| \\ &= \frac{1}{2} |e^{-(k+1)\pi} (-1)^{k+1} - e^{-k\pi} (-1)^k| = \frac{1}{2} \{e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}\} \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}) e^{-k\pi} \end{aligned}$$

よって

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi}) \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)} \left(1 - \frac{1}{e^{n\pi}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$$

補3

座標平面の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲において、2つの曲線 $y = \cos x$ と y

$= \sin 2x$ の交点の座標を (a, b) とし、2つの曲線 $y = \cos x$ と y

$= \tan x$ の交点の座標を (c, d) とする。

(1) a, b および d^2 の値を求めよ。

(2) $c > a$ であることを示せ。

(3) 連立不等式 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\cos x \leq y \leq \sin 2x$, $y \geq \tan x$ の表す領域を

図示し、その領域の面積を求めよ。

解説

(1) $\cos x = \sin 2x$ として

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{よって, } a = \frac{\pi}{6}, b = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos x = \tan x$ として

$$\cos^2 x = \sin x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$d^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ より, } \cos^2 c < \cos^2 a$$

$$\cos c > 0, \cos a > 0 \text{ より, } \cos c < \cos a$$

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq c \leq \frac{\pi}{4} \text{ より, } c > a$$

(3) $x = \frac{\pi}{4}$ のとき, $\tan x = 1$, $\sin 2x = 1$

$y = \tan x$ と $y = \sin 2x$ は $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ でただ

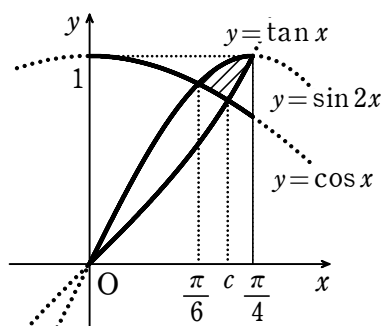
1つの共有点をもち, その共有点は

$$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

連立不等式の表す領域は右図の斜線部分

ただし, 境界線を含む

求める面積を S とおくと



$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^c (\sin 2x - \cos x) dx + \int_c^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \tan x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^c + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \log |\cos x| \right]_c^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\sin c + \frac{3}{4} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \log |\cos c|$$

$$= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{5}-1)$$

補4

曲線 $y = \left| x - \frac{1}{x} \right|$ ($x > 0$) と直線 $y = 2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

解説

$f(x) = x - \frac{1}{x}$ とおくと, $y = f(x)$ は,

$y = x$ と $y = -\frac{1}{x}$ を足し合わせたものより

$y=|f(x)|$ のグラフの概形は右図

面積を求める領域は斜線部

$0 < x < 1$ のとき

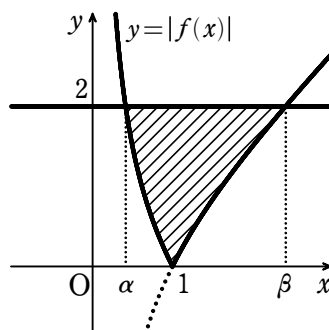
$$y = -\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 + yx - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

$x \geq 1$ のとき

$$y = x - \frac{1}{x}$$

$$x^2 - yx - 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$



求める面積 S は

$$S = \int_0^2 \left\{ \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} - \frac{-y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \right\} dy = \int_0^2 y dx = 2$$

別解

$y=|f(x)|$ と $y=2$ の交点の x 座標を求める

$0 < x < 1$ のとき

$$y = -\left(x - \frac{1}{x}\right) \text{ より}$$

$$-x + \frac{1}{x} = 2 \quad \therefore x = -1 + \sqrt{2}$$

$x \geq 1$ のとき

$$y = x - \frac{1}{x} \text{ より}$$

$$x - \frac{1}{x} = 2 \quad \therefore x = 1 + \sqrt{2}$$

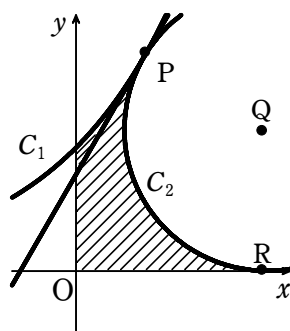
$-1 + \sqrt{2} = \alpha$, $1 + \sqrt{2} = \beta$ とすると

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^1 \left\{ 2 - \left(-x + \frac{1}{x}\right) \right\} dx + \int_1^{\beta} \left\{ 2 - \left(x - \frac{1}{x}\right) \right\} dx \\ &= \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \log|x| \right]_{\alpha}^1 + \left[2x - \frac{1}{2}x^2 + \log|x| \right]_1^{\beta} \\ &= 1 + 2(\beta - \alpha) - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \log \alpha \beta = 1 + 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 + \log 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

補5

座標平面上で関数 $y=e^x$ のグラフを C_1 とし、
 C_1 上の点 P における接線と x 軸が $\frac{\pi}{3}$ の角で
 交わるとする。第 1 象限に中心 Q をもつ円が
 C_1 と点 P で、 x 軸と点 R で接している。
 その円の P, R を両端とする弧のうち短い方
 を C_2 とする。



- (1) 点 P, Q の座標を求めよ。
- (2) x 軸, y 軸, C_1 , C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

解説

(1) $y=e^x$, $y'=e^x$

P の x 座標を t とすると、

P における接線と x 軸が $\frac{\pi}{3}$ の角で交わるから

$$e^t = \tan \frac{\pi}{3} \quad \therefore t = \log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3$$

よって、 $P\left(\frac{1}{2} \log 3, \sqrt{3}\right)$

図より、 $PS = \frac{3}{2}r$ より、 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

よって、 $Q\left(\frac{1}{2} \log 3 + 1, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$

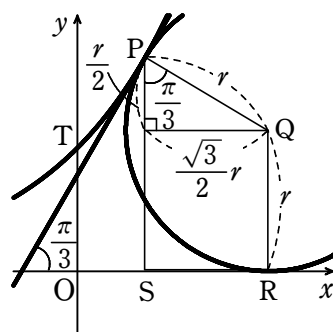
(2) 点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を S, 曲線 C_1 と y 軸との交点を T とする。

求める面積を S とすると

$$S = (\text{領域 OSPT}) + (\text{台形 PSRQ}) - (\text{扇形 QPR})$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2} \log 3} e^x dx + \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \cdot 1 - \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \left[e^x \right]_0^{\frac{1}{2} \log 3} + \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4}{9}\pi = \sqrt{3} - 1 + \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4}{9}\pi = \frac{11\sqrt{3}}{6} - 1 - \frac{4}{9}\pi$$



補6

b は実数, r は正の実数とする。 xy 平面上に 2 つの曲線

$$C_1: y = -\cos 2x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C_2: x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

がある。 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とするとき, 曲線 C_1 と曲線 C_2 が共有点 $P(a, -\cos 2a)$ をもち, 点 P において共通の接線をもつとする。

(1) b を a の式で表し, $\lim_{a \rightarrow +0} b$ の値を求めよ。

(2) $a = \frac{\pi}{3}$ のとき, 曲線 C_1 の $y \leq -\cos 2a$ の部分と, 曲線 C_2 の $y \geq -\cos 2a$ の部分で囲まれた図形の面積を求めよ。

解説

(1) $f(x) = -\cos 2x$ とおくと

$$f'(x) = 2\sin 2x$$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ すなわち $0 < 2a < \pi$ において $\sin 2a \neq 0$ であるから,

点 P における C_1 の法線の方程式は

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$y - (-\cos 2a) = -\frac{1}{2\sin 2a}(x - a)$$

この直線は P における円 C_2 の法線でもあり,

円 C_2 の中心 $(0, b)$ を通るから

$$b - (-\cos 2a) = -\frac{1}{2\sin 2a}(-a) \quad \therefore b = \frac{a}{2\sin 2a} - \cos 2a$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} b &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{a}{2\sin 2a} - \cos 2a \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2a}{\sin 2a} - \cos 2a \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) $a = \frac{\pi}{3}$ のとき

$$P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$b = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{2}{3}\pi} - \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

$$Q\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), R\left(0, \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) \text{ とし,}$$

求める面積 S は、図の斜線部

P における C_1 の法線の傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから、 $\angle QPR = \frac{\pi}{6}$ より

$$\angle PRQ = \frac{2}{3}\pi, \quad r = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r^2\left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi\left(b - \frac{1}{2}\right) + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{\frac{1}{2} - (-\cos 2x)\right\} dx \\ &= \frac{2}{3}\pi \cdot \left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \left[x + \sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{8}{81}\pi^3 + \frac{\sqrt{3}}{27}\pi^2 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

