

高3理系数学 標準問題演習 演習 2.極限(2)

1 [2000 東北学院大]

等比級数

$$x^2 + x + \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)^2} + \cdots + \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)^{n-1}} + \cdots$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) この級数が収束するような x の範囲を求めよ。
- (2) また、 x がその範囲にあるとき、この等比級数の和を求めよ。

2 [2021 京都大]

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ。

3 [2008 早稲田大]

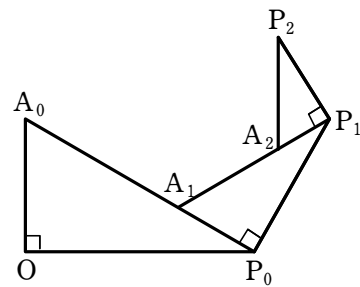
座標平面上で $A_0(0, 1)$, $O(0, 0)$, $P_0(\sqrt{3}, 0)$ として三角形 A_0OP_0 を考える。これに、

$\triangle A_0OP_0$ の各辺の長さを $\frac{2}{3}$ 倍した $\triangle A_1P_0P_1$

を右の図のようにおく。同様に $n \geq 1$ について

も、 $\triangle A_nP_{n-1}P_n$ の各辺の長さを $\frac{2}{3}$ 倍して、

直角を P_n に合わせて $\triangle A_{n+1}P_nP_{n+1}$ をおいて



いく。 $P_n(x_n, y_n)$ として、 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ とすると、 $(a, b) = \boxed{}$ である。

高3理系数学 標準問題演習 演習 2.極限(2)

4 [I . 2010 北海道大 II . 2002 島根大]

I . 1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して, 多角形 $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ を次のように定める。

- (i) AB を D_{n-1} の 1 辺とする。辺 AB を 3 等分し, その分点を A に近い方から P, Q とする。
- (ii) PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1} の外側に作る。
- (iii) 辺 AB を折れ線 $APRQB$ でおき換える。

D_{n-1} のすべての辺に対して (i) ~ (iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする。

- (1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ。
- (2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

II . 1 辺の長さが a の正三角形 T_1 の頂点を A_1, B_1, C_1 とする。 t を正の実数とするととき, 辺 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 を $t:1$ に内分する点をそれぞれ A_2, B_2, C_2 とし, 3 点 A_2, B_2, C_2 を結んで正三角形 T_2 を作る。以下同様に正三角形 $T_3, T_4, T_5, \dots$ を作る。

- (1) T_2 の 1 辺の長さを求めよ。
- (2) 正三角形 $T_1, T_2, T_3, \dots$ の面積の総和 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ の最小値を求めよ。

5 [2005 近畿大]

半径 1 の円 C_1 に内接する正三角形を T_1 とし, T_1 に内接する円を C_2 , 円 C_2 に内接する正三角形を T_2 , 以下同様にして, 円 C_n に内接する正三角形を T_n とすると, C_n の半径は ア , T_n の 1 辺の長さは イ である。したがって, 円 $C_1, C_2, C_3, \dots$ の面積の総和は ウ , 円周の総和は エ であり, 正三角形 $T_1, T_2, T_3, \dots$ の面積の総和は オ である。

6 [島根大]

2つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ が, それぞれ和 A, B をもつとき, 次の問いに答えよ. ただし, $a_1 = 1$ とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + a_{n+1})$ を A, B で表せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1})$ を A, B で表せ.

7 [I. 1996 広島大 II. 2016 大分大]

I. 次の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 n に対して, $2^n > n$ であることを示せ.

(2) 数列の和 $S_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

II. 0 でない実数 r が $|r| < 1$ を満たすとき, 次の問いに答えよ. ただし, 自然数 n に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(n-1) r^n = 0$ である.

(1) $R_n = \sum_{k=0}^n r^k$ と $S_n = \sum_{k=0}^n k r^{k-1}$ を求めよ.

(2) $T_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) r^{k-2}$ を求めよ.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 r^k$ を求めよ.

8 [I . 2016 奈良女子大 II . 神戸大]

I . 数列 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$ の一般項がそれぞれ

$$S_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$$

$$T_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

で表されているとする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。不等式 $S_n < 1 + T_{n-1}$ を示せ。

(3) 数列 $\{S_n\}$ は収束することがわかっている。その極限値を S とするとき、不等式

$$\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{5}{4} \text{ を示せ。}$$

II . 次の無限級数の収束, 発散を調べ, 収束するものはその和を求めよ。

$$(1) 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} - \cdots$$

$$(2) \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right) + \cdots$$

9 [1996 北海道大]

(1) 数学的帰納法により不等式 $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + 1$ を証明せよ。ただし, $n=1, 2, 3, \dots$ とする。

(2) 次の命題は真か偽か。真ならば証明し, 偽ならばその例をあげ理由を説明せよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \text{ ならば数列 } \{a_n\} \text{ は収束する。}$$