

高3数学 標準問題演習 12. 場合の数

① [2001 東京工科大]

1 から 1000 までの整数の中で、33 と互いに素であるものの個数を求めよ。また、165 と互いに素であるものの個数を求めよ。ただし、1 は 33、165 と互いに素であるとする。

② [2016 滋賀大]

6 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 から異なる 5 個の数字を並べて 5 桁の整数を作るとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 の倍数の個数と 3 の倍数の個数をそれぞれ求めよ。
- (2) 6 の倍数の個数を求めよ。
- (3) 5 の倍数で大きい方から 50 番目の整数を求めよ。
- (4) 30 と互いに素である整数の個数を求めよ。

③ [I. 2000 青山学院大 II. 2002 東京農業大]

I. 男子 4 人、女子 3 人がいる。次の並び方は何通りあるか。

- (1) 男子が両端に来るように 7 人が 1 列に並ぶ。
- (2) 女子が隣り合わないように 7 人が 1 列に並ぶ。
- (3) 女子のうち 2 人だけが隣り合うように 7 人が 1 列に並ぶ。
- (4) 女子の両隣りには男子が来るように 7 人が円周上に並ぶ。

II. 1, 2, 3, 4, 5 の順列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 のうちで、 $a_1=2, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ を全部満たすものは何通りあるか。また、 $a_1 \neq 1, a_2 \neq 2, a_3 \neq 3, a_4 \neq 4, a_5 \neq 5$ を全部満たすものは何通りあるか。

④ [山形大]

YAMANAMI の 8 つの文字を横一列に並べるとき、その並べ方について、

- (1) 全部で何通りの並べ方があるか。
- (2) M が 2 つ続く並べ方は何通りあるか。
- (3) A が 3 つ続く並べ方は何通りあるか。
- (4) A が 2 つ以上続く並べ方は何通りあるか。
- (5) A が 2 つ以上続き、かつ、M も 2 つ続く並べ方は何通りあるか。

高3数学 標準問題演習 12. 場合の数

5 [I. 京都先端科学大 II. 帝京大]

I. 白い玉が5個，赤い玉が2個，黒い玉が1個ある．

(1) これらの玉を1列に並べる方法は 通りある．このうち，黒い玉が赤い玉の間に

ある並べ方は 通りある．ただし，黒い玉が赤い玉と隣り合っている必要はない．

(2) これらの玉を円形に並べる方法は 通りある．また，これらの玉に糸を通して輪

にする方法は 通りある．

(3) これらの玉に黒い玉を1つ追加したとき，糸を通して輪にする方法は 通りある．

II. 赤玉3個，白玉3個，合計6個の球がある．

(1) これら6個の玉を一列に並べる方法は全部で何通りか．

(2) これら6個の玉を円形に並べる方法は全部で何通りか．

(3) これら6個の玉に糸を通して首飾りにする方法は全部で何通りか．

(4) 赤玉を1つ加えて合わせて7個の玉に糸を通して首飾りにする方法は全部で何通りか．

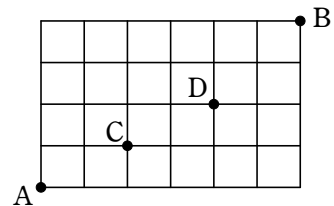
6 [2003 昭和薬科大]

図のような格子状の道路網がある．A地点からB地点に最短経路で行くものとする．

(1) A地点からB地点への経路は何通りあるか．

(2) 途中でC地点を通過して，D地点を通らない経路は何通りあるか．

(3) 角を曲がる回数が全部で3回である経路は何通りあるか．



7 [2017 同志社大]

n は3以上の整数とし，円周を n 等分する点を $A_1, A_2, \dots, A_n$ とする．これらの点の中から異なる3点を選び，それらを結んで作られる三角形を考える．3点の選び方は全部で ア 通りある．また，このような三角形の中で， n が偶数のとき，直角三角形

となる点の選び方は イ 通りあり，鈍角三角形となる点の選び方は ウ 通りあ

る．更に， n が奇数のとき，鈍角三角形となる点の選び方は エ 通りあり，鋭角三

角形となる点の選び方は オ 通りある．

高3数学 標準問題演習 12. 場合の数

8 [2009 慶応義塾大]

x, y, z は 0 以上の整数とする。

- (1) $x + y + z = 24$ を満たす組 (x, y, z) は ア 個ある。
- (2) $x \leq y \leq z$ および $x + y + z = 24$ を満たす組 (x, y, z) は イ 個ある。
- (3) $x + 2y + 3z = 24$ を満たす組 (x, y, z) は ウ 個ある。

9 [2016 慶応義塾大]

定員 2 名, 3 名, 4 名の 3 つの部屋がある。

- (1) 2 人の教員と 7 人の学生の合計 9 人をこれらの 3 つの部屋に定員どおりに入れる割り当て方は ア 通りである。また、その割り当て方のなかで 2 人の教員が異なる部屋に入るようにする割り当て方は イ 通りである。
- (2) 7 人の学生のみを、これらの 3 つの部屋に定員を超えないように入れる割り当て方は ウ 通りである。ただし誰も入らない部屋があってもよい。

10

6 個の球を 3 つの箱に入れる。1 個も入らない箱があってもよいことにすると、次の場合、入れ方は何通りあるか。

- (1) 球と箱のそれぞれに区別があるとき, 通り。
- (2) 球に区別はないが箱に区別があるとき, 通り。
- (3) 球に区別はあるが箱に区別がないとき, 通り。
- (4) 球と箱のそれぞれに区別がないとき, 通り。

高3数学 標準問題演習 12. 場合の数

11 [中央大]

n を正の整数とする. $(x+2)^n$ の展開式における x^r の係数を a_r とおく. ただし, r は整数で $0 \leq r \leq n$ とする.

(1) a_r を n と r の式として表せ.

(2) $0 \leq r \leq n-1$ とする. $\frac{a_r}{a_{r+1}}$ を n と r の式として表せ.

(3) $n=99$ のとき, a_r が最大となる r の値をすべて求めよ.

12 [2014 中央大]

(1) n を正の整数とする. $(1+a)^n$ を二項定理を用いて展開せよ.

(2) 21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ.

(3) $19^n + 21^n$ が 400 で割り切れるような正の整数 n が存在するか. 存在するならば, その例を示せ. 存在しなければ, それを証明せよ.

13 [東京理科大]

${}_nC_r$ を二項係数とすると, 次の和を求めよ.

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$

(2) ${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3{}_nC_3 + \cdots + n{}_nC_n$

(3) ${}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{1}{3}{}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n$

(4) $({}_nC_0)^2 + ({}_nC_1)^2 + ({}_nC_2)^2 + \cdots + ({}_nC_n)^2$

14 [2006 早稲田大]

次の各問いに答えよ. ただし, 正の整数 n と整数 k ($0 \leq k \leq n$) に対して, ${}_nC_k$ は正の整数である事実を使ってよい.

(1) m が 2 以上の整数のとき, ${}_mC_2$ が m で割り切れるための必要十分条件を求めよ.

(2) p を 2 以上の素数とし, k を p より小さい正の整数とする. このとき, ${}_pC_k$ は p で割り切れることを示せ.

(3) p を 2 以上の素数とする. このとき, 任意の正の整数 n に対し, $(n+1)^p - n^p - 1$ は p で割り切れることを示せ.