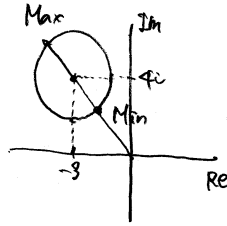


標準問題演習 (9. 複素平面図)

[1]

- ① $|z+3-4i|=2$
 $|z-(3+4i)|=2$
 z は複素平面上で
 中心 $(3+4i)$ 半径 2 の
 (円) を描く



② $|z|$ (z と原点 0 の距離) の

最大値 7
 + 3

- ③ $|z-1|=|z+i|$ より

$$\begin{aligned} |z-1|^2 &= |z+i|^2 \\ (z-1)(\bar{z}-1) &= (z+i)(\bar{z}-i) \\ (z-1)(\bar{z}-1) &= (z+i)(\bar{z}-i) \\ z\bar{z}-z-\bar{z}+1 &= z\bar{z}-iz+\bar{z}i+1 \\ z+\bar{z}-i(z-\bar{z}) &= 0 \end{aligned}$$

$$z = x+iy, \quad (x, y: \text{実数}) \text{ とおくと}$$

$$z+\bar{z}=2x, \quad z-\bar{z}=2iy$$

より

$$2x+2y=0 \quad \therefore y=-x$$

- ④ $2|z-i|=|z+2i|$ より

$$\begin{aligned} 4|z-i|^2 &= |z+2i|^2 \\ 4(z-i)(\bar{z}+i) &= (z+2i)(\bar{z}-2i) \\ 4(z\bar{z}+iz-\bar{z}i+1) &= z\bar{z}-2iz+2i\bar{z}-4 \\ 3z\bar{z}+6iz-6i\bar{z} &= -4 \\ 3z\bar{z}+2iz-2i\bar{z} &= 0 \\ (z-2i)(\bar{z}+2i) &= 4 \\ |z-2i|^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$z \text{ は } |z-2i|=2$$

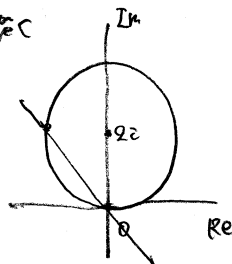
中心 $2i$ 、半径 2 の (円) を描く

求める z は

$$0, -2+2i, 4$$

<point>

1. 複素平面図上の点



[2]

z は OA の垂直二等分線上的点 z と

$$|z|=|z-a|$$

$$|z|^2 = |z-a|^2$$

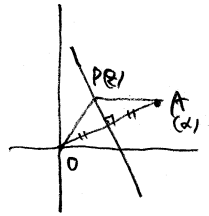
$$z\bar{z} = (z-a)(\bar{z}-\bar{a})$$

$$z\bar{z} = z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a}$$

$$a\bar{z} + \bar{a}z = a\bar{a}$$

両辺 $a\bar{a} = |a|^2 \neq 0$ で割ると

$$\frac{z}{a} + \frac{\bar{z}}{\bar{a}} = 1 \quad \square$$



- ⑤ $C(\alpha+\beta)$ とすると

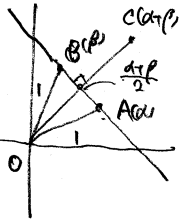
直線 AB は OC の垂直二等分線より

$$\frac{z}{\alpha+\beta} + \frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}+\bar{\beta}} = 1 \quad |a|=1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \alpha+\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \text{ より } \alpha\bar{\alpha}=1 \\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\frac{z}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\beta\bar{z}}{\alpha+\beta} = 1$$

$$\therefore z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha+\beta \quad \square$$



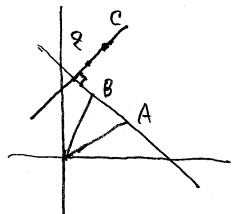
- ⑥ 求める直線 AB 上の点 z とすると

$$\frac{z-y}{\alpha-\beta} \text{ は } z \text{ と } y \text{ の中点より}$$

$$\left(\frac{z-y}{\alpha-\beta} \right) = - \frac{z-y}{\alpha-\beta}$$

$$\alpha\beta(\bar{z}-\bar{y}) = -(z-y) \quad (|\alpha|=|\beta|=1 \text{ より})$$

$$\therefore z - \alpha\beta\bar{z} = y - \alpha\beta\bar{y} \quad \square$$



- II. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$

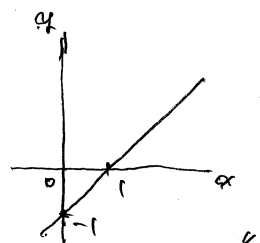
$$z+\bar{z}+i(z-\bar{z})-2=0$$

$$z = x+iy, \quad (x, y: \text{実数}) \text{ とすると}$$

$$z+\bar{z}=2x, \quad z-\bar{z}=2iy \text{ より}$$

$$2x-2y-2=0$$

$$\therefore y = x-1$$



IV. 1. 垂直に分割する点 $z \in P(z)$ と

すると $AP = OP$ より

$$|z - \alpha| = |z|$$

$$|z - \alpha|^2 = |z|^2$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = z\bar{z}$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = z\bar{z}$$

$$z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = z\bar{z}$$

$$\therefore \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha} = 0 \quad \text{H.} \dots ①$$

② (可分性: OP の垂直に分割する

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} - \beta\bar{\beta} = 0 \dots ②$$

$\triangle OAB$ の内角 $\angle AOB$ の二等分線より

$$① \times \beta - ② \times \alpha \text{ より}$$

$$(\alpha\beta - \alpha\bar{\beta})z = \alpha\bar{\alpha}\beta - \alpha\beta\bar{\beta}$$

$$\therefore z = \frac{\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha\beta - \alpha\bar{\beta}} //$$

$$\text{③ } \frac{\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta})}{\alpha\beta - \alpha\bar{\beta}} = \alpha + \beta$$

$$\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - \alpha\bar{\beta})$$

$$\alpha\beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta}^2$$

$$\alpha\bar{\beta} = \alpha\bar{\beta}^2$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\bar{\beta}}{\alpha}\right) \quad \therefore \frac{\beta}{\alpha} = \pm \sqrt{\alpha}$$

<point>

1. 複素平面上の直線

②

I. 1. $|z - \alpha| = |z|$ とすると

$$|z - \alpha| = |z|$$

$$\vdots$$

$$z\bar{z} = \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z}$$

② $z = 0$ を通る

$$z\bar{z} = \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z}$$

$$z = 1 //$$

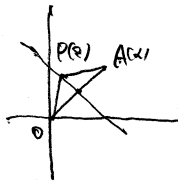
$$1 = \alpha + \bar{\alpha}$$

$$\therefore \operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}$$

③

$A(0), B(1)$ として 線分 AB の垂直二等分線より

あり



③ $z = 0$ を通る

$$z\bar{z} = \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z}$$

$$z = 1 //$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1 \quad \therefore \alpha = 1 - \alpha \dots ①$$

$$z = \beta \text{ を通る}$$

$$\beta\bar{\beta} = \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta}$$

④ より

$$\beta\bar{\beta} = \alpha\bar{\beta} + (1 - \alpha)\bar{\beta}$$

$$(\beta - \beta)\bar{\alpha} = \beta(1 - \beta)$$

$$\therefore \alpha = \frac{\beta(1 - \bar{\beta})}{\beta - \bar{\beta}} \quad (\beta \text{ は } z \text{ 上の点より } \bar{\beta} \neq \beta)$$

$$z\bar{z} = \frac{\beta(1 - \bar{\beta})}{\beta - \bar{\beta}} \bar{z} + \frac{\bar{\beta}(1 - \beta)}{\beta - \bar{\beta}} z //$$

II. 1. $z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 3 = 0$

$$(z + i)(\bar{z} - i) = 4$$

$$(z + i)(\bar{z} + i) = 4$$

$$|z + i|^2 = 4$$

$$\therefore |z + i| = 2$$

よって z は $z = -i$ から距離 2 の点の集合を表す。これは中心 $-i$ 、半径 2 の円。

② 中心 $-i$ 、半径 2 の円

III. 1. $z\bar{z} + (z + i)z + (z - i)\bar{z} - 4 = 0 \dots ①$

$$|z + (z - i)|^2 = 9$$

$$|z + (z - i)|^2 = 9$$

$$\therefore |z + (z - i)| = 3$$

②

中心 $-2 + i$ 、半径 3 の円

③ $(z - i)z + (z + i)\bar{z} = \alpha\bar{\alpha} \dots ②$

$$z(z + i) - (z - i)\bar{z} = \alpha\bar{\alpha}$$

$$z = \alpha + i\beta \quad (\alpha, \beta: \text{実数}) \text{ とおくと}$$

$$z + \bar{z} = 2\alpha, \quad z - \bar{z} = 2i\beta \text{ より}$$

$$4\alpha + 2i\beta = 2\alpha$$

$$\therefore \alpha = -2\alpha + i\beta \quad (2\alpha + i\beta = 0)$$

α, β は 0 と 0 の異なる点

$$|\alpha - \beta| = 4 \text{ より } ① \text{ の中心 } ② \text{ の}$$

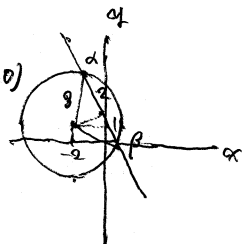
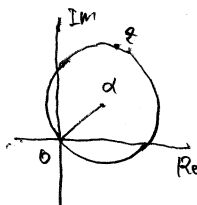
$$\text{半径 } 3 \text{ の円より}$$

$$\frac{|-2 - i - \alpha|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$|k + 3| = 5$$

$$k + 3 = \pm 5$$

$$\therefore k = 2, -8 //$$



IV. $|z - zi| \leq 2$

z は中心 (zi) 、半径 2 の円の内部および周上の点

$|z - zi| \geq |z|$ より

$|z - zi|^2 \geq |z|^2$

$(z - zi)(\overline{z - zi}) \geq z\bar{z}$
 $\overline{z} + zi$

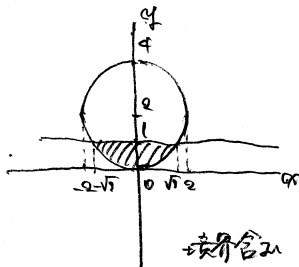
$z\bar{z} + zi\bar{z} - z\bar{z} + 4 \geq z\bar{z}$

$zi(\bar{z} - z) \geq 0$

$z = x + yi$ (x, y : 実数) とおくと

$z - \bar{z} = 2yi$ より

$-2y \geq -2 \therefore y \leq 1$



境界含む

②/1) z の実部を x とす

$1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$

$1 \leq z + \frac{1}{z}$ より $z > 0$

$z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}, (z > 0)$

$3z^2 - (10z + 3) \leq 0 \quad \frac{1}{3}x = -1$

$(z - 3)(3z - 1) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq z \leq 3$

②/2) $|z| = 1$ のとき

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とおくと

$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$

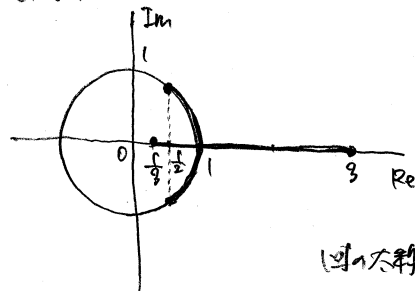
$1 \leq z + \frac{1}{z} \leq \frac{10}{3}$ より

$1 \leq 2 \cos \theta \leq \frac{10}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq 1$

$\therefore \frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 1$

②/3) $z > 0$



境界を除く

II. d) A, B, C は異なる点より

$z \neq 1, z \neq -1, z \neq -z$

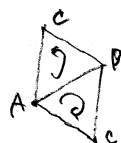
$\therefore z \neq 0, \pm 1$

$\triangle ABC$ の外接円の中心を z とす

$\frac{z^2 - 1}{z - 1} = \cos(\pm 60^\circ) + i \sin(\pm 60^\circ)$

$z + 1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\therefore z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$



4

I. d) m の逆数 $\frac{1}{m}$ と $\frac{1}{3}$ とす

$\overline{m} = m$

$\overline{(z + \frac{1}{z})} = z + \frac{1}{z}$

$\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} = z + \frac{1}{z}$

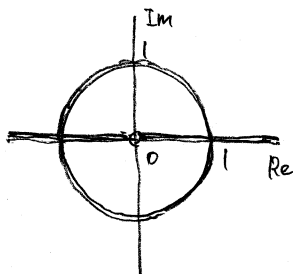
$|z|^2 \overline{z} + z = |z|^2 \overline{z} + \overline{z}$

$|z|^2 (\overline{z} - z) - (\overline{z} - z) = 0$

$(|z|^2 - 1)(\overline{z} - z) = 0$

$\therefore |z|^2 - 1 = 0$ or $\overline{z} = z$

$\therefore |z| = 1$ or z は実数 ($z \neq 0$)



境界を除く
 実数は $Re z$

③) $\angle A = 90^\circ$ とす

$$\left(\frac{z-1}{z-1}\right) = -\frac{z^2-1}{z-1}$$

$$\overline{z+1} = (z+1)$$

$$z+\bar{z} = -2$$

$$z = \alpha + i\beta \text{ (} \alpha, \beta: \text{実数) とす}$$

$$z+\bar{z} = 2\alpha = -2$$

$$\alpha = -1$$

④) $\angle B = 90^\circ$ とす

$$\left(\frac{z^2-2}{1-z}\right) = -\frac{z^2-2}{1-z}$$

$$-\bar{z} = z$$

$$z+\bar{z} = 0$$

$$\therefore \alpha = 0$$

⑤) $\angle C = 90^\circ$ とす

$$\left(\frac{1-\bar{z}^2}{z-z^2}\right) = -\frac{1-z^2}{z-z^2}$$

$$\left(\frac{1+\bar{z}}{z}\right) = -\frac{1+z}{z}$$

$$z(1+\bar{z}) = -\bar{z}(1+z)$$

$$z+\bar{z} = -\bar{z}-z\bar{z}$$

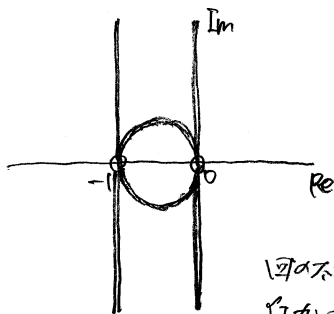
$$z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$$

$$(z+\frac{1}{2})(\bar{z}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$|z+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore |z+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$$

①) ~ ⑤) より



円の内部
は $z \in \mathbb{C}$ //

<point>

1. 複素平面 z の平面図.

[5]

$$\textcircled{1}) \beta = 1 - \sqrt{3}i \text{ とおす}$$

$$z \text{ は } |z-\beta| = 1 \text{ 上 } \in \mathbb{C}$$

$$w = \alpha z \text{ から } z = \frac{w}{\alpha} \text{ より}$$

$$\left|\frac{w}{\alpha} - \beta\right| = 1$$

$$|w - \alpha\beta| = |\alpha|$$

ここで

$$\alpha\beta = 2(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) = 2$$

$$|\alpha| = 4$$

より

$$|w - 2| = 4$$

w は点 (2) を中心とし半径 4 の円 $\in \mathbb{C}$

[別解]

$$\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) \text{ より}$$

w は点 z を原点を中心として 60° 回転し

原点からの距離を 4 倍した点

$$\textcircled{2}) w = 2z + 3 \text{ より}$$

$$z = \frac{w-3}{2} = -\frac{1}{2}w + \frac{3}{2}$$

$$|z-1| = 2 \text{ より}$$

$$\left|-\frac{1}{2}w + \frac{3}{2} - 1\right| = 2$$

$$\left|-\frac{1}{2}(w - \frac{3-i}{2})\right| = 2$$

$$|w - \frac{3-i}{2}| = 4$$

$$|w - (3+i)| = 2$$

w は点 $(3+i)$ を中心とし半径 2 の円 $\in \mathbb{C}$ //

<point>

1. 複素平面 z の平面図

[6]

$$w = z^2$$

$$z = \alpha + i\beta \text{, } w = X + iY \text{ とおす}$$

$$\textcircled{1}) z \text{ の } OA \text{ 上 } \in \mathbb{C} \text{ とす}$$

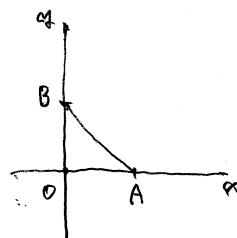
$$\begin{cases} \alpha = t \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$w = z^2 \text{ より}$$

$$X + iY = t^2$$

$$\therefore X = t^2$$

$$Y = 0 \quad \therefore Y = 0 \quad (0 \leq X \leq 1)$$



ii) $z \neq 0, AB \perp \varepsilon \text{ 平面 } < \varepsilon \perp z$

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$w=z^2 \text{ により}$$

$$\begin{aligned} X+Yi &= t^2 + (1-t)^2 i^2 \\ &= t^2 + 2t(-1-t)^2 - (1-t)^2 \\ &= 2t + 1 + 2t(-1-t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X=2t-1 \dots ① \\ Y=2t(-1-t) \dots ② \end{cases}$$

①より

$$t = \frac{X+1}{2} \quad -1 < X < 1$$

②より

$$Y = 2 \cdot \frac{X+1}{2} \cdot \frac{1-X}{2} = -\frac{X^2}{2} + \frac{1}{2}$$

iii) $z \neq 0, \beta \perp \varepsilon \text{ 平面 } < \varepsilon \perp z$

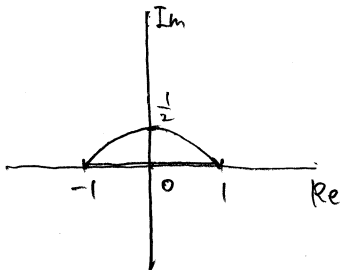
$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

$$w=z^2 \text{ により}$$

$$\begin{aligned} X+Yi &= (ti)^2 \\ &= -t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X=-t^2 \\ Y=0 \end{cases} \quad \therefore Y=0 \quad (0 \leq X \leq 1)$$

iv) $z \neq 0$ より Q の軌跡は $|z| \leq 1$ の円



⑦

I. d) L 上の点 z と z^2 と

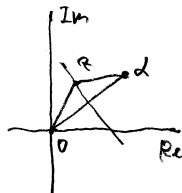
$$|z-\alpha| = |z| \quad (w \neq 0)$$

$$w = \frac{1}{z} \text{ かつ } z = \frac{1}{w} \text{ により}$$

$$\left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = \left| \frac{1}{w} \right|$$

$$|\alpha w - 1| = 1$$

$$\left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$$



L 上の点 z と z^2 と

$w = \frac{1}{z}$ かつ $z = \frac{1}{w}$ の1つは原点を除いたもの

ii) $z^2 = 1$

$$(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore z=1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \therefore \beta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

また

$$z + \bar{z} = -1, |z| \leq 1$$

の範囲を β と

$$z + \bar{z} = -1 \text{ より}$$

$$\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{w}\right) = -1$$

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = -1$$

$$\bar{w} + w = -w\bar{w}$$

$$w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$$

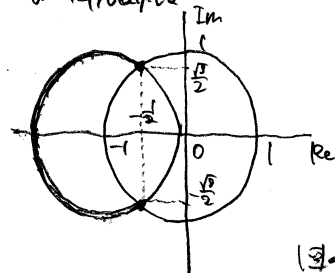
$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1$$

$$|w+1|^2 = 1 \quad \therefore |w+1| = 1$$

$$|z| \leq 1 \text{ より}$$

$$\left| \frac{1}{w} \right| \leq 1 \quad \therefore |w| \geq 1$$

L 上の点 z と z^2 と



⑧ 太字は、

II. d) $w = kz \quad (k > 0)$

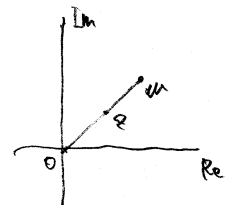
$$|w| = \frac{1}{|z|} \text{ より}$$

$$|w||z| = 1$$

$$k|z|^2 = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{|z|^2}$$

L 上

$$w = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

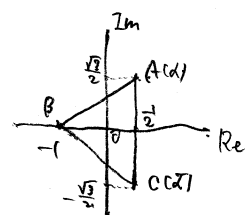


反転

$$z, z^2 \text{ により}$$

$$(z+1)(z^2+z+1)=0$$

$$\therefore z = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$



また $AC \perp EO$ とす

$$z + \bar{z} = 1, |z| \leq 1$$

$$u = \frac{1}{z} \text{ かつ } z = \frac{1}{u} \text{ かつ}$$

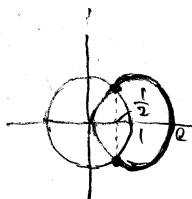
$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u} = 1, \left| \frac{1}{u} \right| \leq 1$$

$$u\bar{u} - u\bar{u} = 0, |u| \geq 1$$

$$(u-1)(\bar{u}-1) = 1, |u| \geq 1$$

$$|u-1|^2 = 1, |u| \geq 1$$

$$\therefore |u-1| = 1, |u| \geq 1$$



$AB \perp AC \perp EO$ であり $\frac{2}{3}\pi$ は $\frac{2}{3}\pi$ 離れたもの
 AC 上の点 z と $\frac{2}{3}\pi$ 離れた点 z' とすると
 z' は AB 上にあり

$$z = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) z$$

また $u = \frac{1}{z}$ とすると

$$u = \frac{1}{\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) z}$$

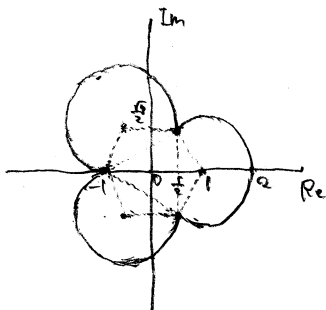
$$= \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{z}$$

$$= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) u$$

u は u と $\frac{2}{3}\pi$ 離れたもの

BC は AB と $\frac{2}{3}\pi$ 離れたものとなるから

点 z は AB 上にあり



$$S = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{4\pi}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

8

① 条件から $z + \bar{z} = 0$ と表す

$$u = \frac{z+i}{z+1} \text{ かつ}$$

$$u(z+1) = z+i$$

$$(u-1)z = -u+i$$

$$u = 1 \text{ とすると } z = -u+i = -1+i$$

$$\therefore z = \frac{-u+i}{u-1}$$

$$z + \bar{z} = 0 \text{ かつ}$$

$$\frac{-u+i}{u-1} + \frac{-\bar{u}-i}{\bar{u}-1} = 0$$

$$(-u+i)(\bar{u}-1) + (-\bar{u}-i)(u-1) = 0$$

$$-u\bar{u} + u + i\bar{u} - i - \bar{u}u - \bar{u} - iu + i = 0$$

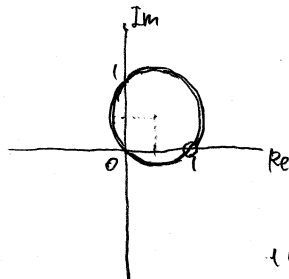
$$u\bar{u} - \frac{1-i}{2}u - \frac{1+i}{2}\bar{u} = 0$$

$$\left(u - \frac{1+i}{2} \right) \left(\bar{u} - \frac{1-i}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\left| u - \frac{1+i}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left| u - \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

u は u と $\frac{1+i}{2}$ の半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円周上にあり



1 は $P \notin C$

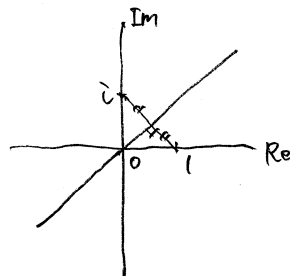
② $|z| = 1$ とす

$$\left| \frac{-u+i}{u-1} \right| = 1$$

$$|u-i| = |u-1|$$

u は 1 と i の距離が等しい点の集合

この点 z は z の軌跡が $z = \frac{1+i}{2}$ であり



9

$$① u = z + \frac{2}{z}$$

$$\begin{aligned} u + v i &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{2}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{2}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} u = (r + \frac{2}{r}) \cos \theta \\ v = (r - \frac{2}{r}) \sin \theta \end{cases}$$

② 取 $\theta = 0, \pi$ 得 $u = r + \frac{2}{r}$ 与 $u = r - \frac{2}{r}$

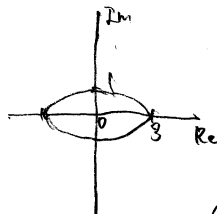
$$r = 1, 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\begin{cases} u = 3 \cos \theta \\ v = -\sin \theta \end{cases}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(-v)^2 + \left(\frac{u}{3}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{u^2}{9} + v^2 = 1$$



③ 取 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 得 $u = r - \frac{2}{r}$ 与 $u = r + \frac{2}{r}$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2$$

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(r + \frac{2}{r}\right) \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{2}{r}\right) \end{cases}$$

$$\left(r + \frac{2}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{2}{r}\right)^2 = 8$$

$$\frac{4}{3}u^2 - 4v^2 = 8$$

$$\therefore \frac{u^2}{6} - \frac{v^2}{2} = 1$$

