

1.5 複素数平面上的の変換

(1) $w = \alpha z + \beta$

1つの値 x に対して, 1つの値 y を対応させる規則を関数といったが, その拡張として, 平面上の1つの点 (x, y) に対して, 平面上の1つの点 (X, Y) を対応させる規則を変換という。ここでは, 複素数平面上的の主な変換について考える。まず $w = \alpha z + \beta$ (α, β は複素数) について考える。

例1

(1) 3つの複素数 α, z, w は $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$ で, $w = \alpha z$ を満たしている。 z が複素数平面上で $1 - \sqrt{3}i$ を表す点を中心とする半径1の円上を動くとき, w はどのような図形を描くか。

(2) 複素数平面上で, 複素数 z の表す点が原点を中心とする半径1の円周上を動く。このとき, $w = (1+i)z + 1$ の表す点の軌跡を求めよ。

解説

(1) 点 z は点 $1 - \sqrt{3}i$ を中心とする半径1の円上の点より

$$|z - (1 - \sqrt{3}i)| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$w = \alpha z$ であるから, $z = \frac{w}{\alpha}$ より

$$\left| \frac{w}{\alpha} - (1 - \sqrt{3}i) \right| = 1$$

$$|w - (1 - \sqrt{3}i)\alpha| = |\alpha|$$

$$\therefore |w - 8| = 4$$

よって, 点 w は点8を中心とする半径4の円を描く

別解

$$w = \alpha z = (2 + 2\sqrt{3}i)z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)z \text{ より,}$$

w は z を原点の周りに $\frac{\pi}{3}$ 回転し,

原点からの距離を4倍したものより,

z が点 $1 - \sqrt{3}i$ を中心とし, 半径1の円上を動くとき,

w は点8を中心とし, 半径4の円上を動く

(2) z の表す点が原点を中心とする半径1の円周上より

$$|z| = 1$$

$w = (1+i)z + 1$ であるから, $z = \frac{w-1}{1+i}$ より

$$\left| \frac{w-1}{1+i} \right| = 1 \quad \therefore |w-1| = \sqrt{2}$$

よって, w は点 1 を中心とし, 半径 $\sqrt{2}$ の円上を動く

別解

w は z を原点中心に 45° 回転し,

原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍し,

実軸方向に 1 だけ平行移動したもの

$$(2) w = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

例2

複素数平面上の 2 点を $A(-1+i)$, $B(2+i)$ とするとき

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形 ABC の頂点 C(γ) を表す複素数 γ を求めよ.

(2) 点 P(z) が線分 AB 上を A から B まで動く. このとき複素数 iz^2 が表す点は, 複素数平面上でどのような図形をえがくか図示せよ.

解説

(1) 点 C は, 点 B を A の周りに $\pm 60^\circ$ 回転したものより

$$\gamma = \{(2+i) - (-1+i)\}[\cos(\pm 60^\circ) + i\sin(\pm 60^\circ)] + (-1+i) \quad (\text{複号同順})$$

$$\therefore \gamma = \frac{1 + (2 \pm 3\sqrt{3})i}{2}$$

(2) $z = t + i$ ($-1 \leq t \leq 2$) と表せるから

$$iz^2 = (t^2 + 2ti - 1)i = -2t + (t^2 - 1)i$$

$iz^2 = x + yi$ (x, y は実数) とすると

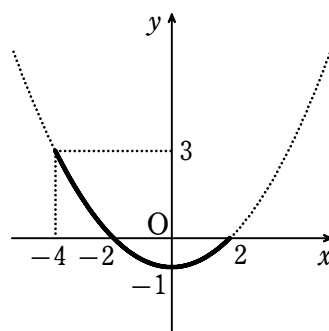
$$x = -2t, \quad y = t^2 - 1$$

t を消去して

$$y = \left(-\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad \therefore y = \frac{x^2}{4} - 1$$

$-1 \leq t \leq 2$ より, $-4 \leq x \leq 2$

よって, iz^2 が表す点の描く図形は右図



(3) 反転 $\left(w = \frac{r^2}{z}\right)$

例3

複素数平面上の2点 $P(z)$, $Q(w)$ が次の2つの条件を満たすとする。ただし、 $O(0)$ は原点である。

- ・線分 OP の長さ と 線分 OQ の長さ の積が 1 に等しい。
- ・ O を端とする半直線 OP 上に Q がある。

- (1) z を w を用いて表せ。
- (2) 点 $A(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき、 Q の軌跡を図示せよ。ただし、 i は虚数単位である。
- (3) $r > 0$ とし、 β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする。 P が点 $B(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を1周するとき、 Q の軌跡を求めよ。

解説

- (1) O を端とする半直線 OP 上に Q があるから

$$z = kw \quad (k > 0) \cdots \textcircled{1}$$

線分 OP の長さ と 線分 OQ の長さ の積が 1 より

$$|z||w| = 1 \cdots \textcircled{2}$$

- ①, ②より

$$|kw||w| = 1$$

$$k|w|^2 = 1 \quad (k > 0) \quad \therefore k = \frac{1}{|w|^2} = \frac{1}{w\overline{w}}$$

- ①より

$$z = \frac{1}{w} \quad \left(w = \frac{1}{z}\right)$$

- (2) 点 P は点 A を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を動くから

$$z \neq 0 \cdots \textcircled{3} \quad \text{かつ} \quad |z - (1-i)| = \sqrt{2} \cdots \textcircled{4}$$

$$z = \frac{1}{w} \quad \text{より}$$

$$\left| \frac{1}{w} - (1-i) \right| = \sqrt{2}$$

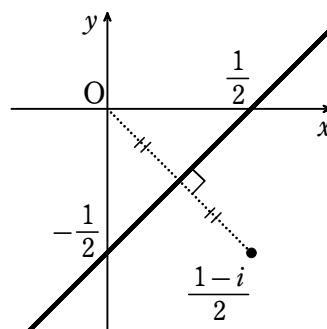
$$\left| \frac{1 - (1-i)\overline{w}}{w} \right| = \sqrt{2}$$

$$\frac{|1 - (1-i)\overline{w}|}{|\overline{w}|} = \sqrt{2}$$

$$|1-i| \left| \frac{1}{1-i} - \overline{w} \right| = \sqrt{2} |\overline{w}|$$

$$\left| \frac{1+i}{2} - \overline{w} \right| = |\overline{w}|$$

$$\left| w - \frac{1-i}{2} \right| = |w|$$



よって、点 Q は O と複素数 $\frac{1-i}{2}$ が表す点を

両端とする線分の垂直二等分線上を動き、

③より点 Q はこの直線全体を動く

したがって、求める Q の軌跡は右図

(3) 点 P は点 B を中心とする半径 r の円上を動くから

$$|z - \beta| = r$$

$$z = \frac{1}{w} \text{ より}$$

$$\left| \frac{1}{w} - \beta \right| = r$$

$$\left| \frac{1 - \beta \overline{w}}{\overline{w}} \right| = r$$

$$\frac{|1 - \beta \overline{w}|}{|\overline{w}|} = r$$

$$|1 - \beta \overline{w}| = r |\overline{w}|$$

$$|1 - \beta \overline{w}|^2 = r^2 |w|^2$$

$$(1 - \beta \overline{w})(1 - \overline{\beta} w) = r^2 |w|^2$$

$$1 - \beta \overline{w} - \overline{\beta} w + |\beta|^2 |w|^2 = r^2 |w|^2$$

$$(|\beta|^2 - r^2) |w|^2 - \overline{\beta} w - \beta \overline{w} + 1 = 0$$

$$|\beta|^2 - r^2 \neq 0 \text{ より}$$

$$|w|^2 - \frac{\overline{\beta}}{|\beta|^2 - r^2} w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \overline{w} + \frac{1}{|\beta|^2 - r^2} = 0$$

$$\left(w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right) \overline{\left(w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right)} = \frac{r^2}{(|\beta|^2 - r^2)^2}$$

$$\left| w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right|^2 = \frac{r^2}{(|\beta|^2 - r^2)^2}$$

$$\left| w - \frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2} \right| = \frac{r}{||\beta|^2 - r^2|}$$

よって、点 Q の軌跡は

複素数 $\frac{\beta}{|\beta|^2 - r^2}$ が表す点を中心とする半径 $\frac{r}{||\beta|^2 - r^2|}$ の円

本問のような変換を反転という。反転は一般に $w = \frac{r^2}{z}$ ($r > 0$) で表される。

直線や円が反転によってどのような図形に移されるかを考える。

$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$ (a, b を実数, β を複素数) は直線や円を表すから、これを移すとして、

$$w = \frac{r^2}{z} \text{ であるから } z = \frac{r^2}{w} \text{ より}$$

$$a \cdot \frac{r^2}{w} \cdot \frac{r^2}{w} + \bar{\beta} \cdot \frac{r^2}{w} + \beta \cdot \frac{r^2}{w} + c = 0$$

$$\therefore cw\bar{w} + r^2\bar{\beta}w + r^2\beta\bar{w} + ar^4 = 0$$

となり、 w は直線や円を表す。

したがって、直線や円は、反転により直線や円に移ることが分かる。

また、 $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{z}}$ も $z_1 = \bar{z}, z_2 = \frac{1}{z_1}$ として、 $z \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow w$ によ

って、 x 軸対称移動と反転に分解でき、対称移動では図形の形は変化しないので、直線や円は直線や円に移ることが分かる。

例4

複素数平面上の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

解説

(1) L は点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線より

$$|z| = |z - \alpha| \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$w = \frac{1}{z}$ であるから, $z = \frac{1}{w} \dots\textcircled{2}$, $w \neq 0 \dots\textcircled{3}$ より

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{1}{w} - \alpha \right|$$

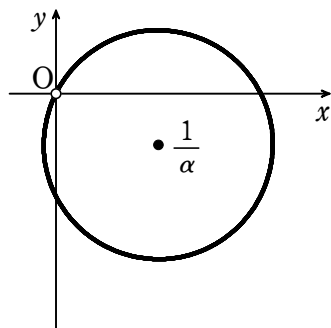
$$1 = |1 - \alpha w|$$

$$\frac{1}{|\alpha|} = \frac{|1 - \alpha w|}{|\alpha|}$$

$$\therefore \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|} \dots\textcircled{4}$$

よって, 点 w の軌跡は円④から 1 点 O を除いたもの, すなわち, 点 w の軌跡は

中心 $\frac{1}{\alpha}$, 半径 $\frac{1}{|\alpha|}$ の円から 1 点 O を除いたものである



(2) 条件より $\beta = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$$\beta^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

よって, 2 点 β , β^2 を結ぶ線分上の点は

$$|z| = |z + 1|, |z| \leq 1$$

と表せる

$|z| = |z + 1|$ と(1)より

$$|w + 1| = 1$$

$|z| \leq 1$ より

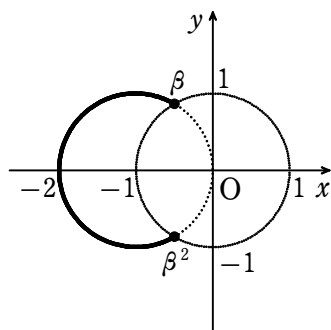
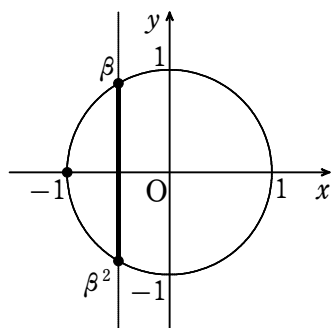
$$\left| \frac{1}{w} \right| \leq 1$$

$$\therefore |w| \geq 1$$

よって, 求める点 w の軌跡は,

中心が -1 , 半径が 1 の円のうち,

$|w| \geq 1$ を満たす部分で, 右図の太線部分



(4) 1 次分数変換 (メビウス変換) $\left(w = \frac{az+b}{cz+d}\right)$

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) という変換を, 1 次分数変換やメビウス変換という。この変換により, 直線や円がどのような図形に移るかを考える。

$c=0$ のとき, $ad \neq 0$ より

$$w = \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right)$$

より, この変換は平行移動と回転拡大を組み合わせたものなので, 図形の形は変化しない。したがって, 直線は直線, 円は円に移る。

$c \neq 0$ のとき,

$$w = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{z + \frac{d}{c}}{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

より,

$$z_1 = z + \frac{d}{c}, z_2 = \overline{z_1}, z_3 = \frac{1}{z_2}, z_4 = \frac{bc-ad}{c^2} z_3, w = z_4 + \frac{a}{c}$$

として, $z \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow z_4 \rightarrow w$ によって, 平行移動, x 軸対称移動, 反転, 回転拡大, 平行移動に分解でき, これらの移動では図形の形は変化しないので, 直線や円は直線や円に移る。

例5

2 つの複素数 w, z が $w = \frac{iz}{z-2}$ を満たしているとする。ただし, i は虚数単位とする。

- (1) 複素数平面上で, 点 z が原点を中心とする半径 2 の円周上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか。ただし, $z \neq 2$ とする。
- (2) 複素数平面上で点 z が虚軸上を動くとき, 点 w はどのような図形を描くか。
- (3) 複素数平面上で点 w が実軸上を動くとき, 点 z はどのような図形を描くか。

解説

$$(1) w = \frac{iz}{z-2} \text{ より}$$

$$w(z-2) = iz$$

$$(w-i)z = 2w$$

$w = i$ とすると, $0 = 2i$ となり矛盾するから, $w \neq i$ より

$$z = \frac{2w}{w-i} \dots \textcircled{1}$$

$$|z| = 2 \text{ より}$$

$$\left| \frac{2w}{w-i} \right| = 2$$

$$\therefore |w| = |w-i|$$

よって, 点 w は 2 点 0 と i を結ぶ線分の垂直二等分線を描く

(2) 点 z が虚軸上を動くとき

$$z + \bar{z} = 0$$

$w \neq i$ のとき

$$\frac{2w}{w-i} + \overline{\left(\frac{2w}{w-i} \right)} = 0$$

$$\frac{2w}{w-i} + \frac{2\bar{w}}{w+i} = 0$$

$$4w\bar{w} + 2iw - 2i\bar{w} = 0$$

$$(2w-i)(2\bar{w}+i) = 1$$

$$(2w-i)\overline{(2w-i)} = 1$$

$$|2w-i|^2 = 1$$

$$|2w-i| = 1$$

$$\therefore \left| w - \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2} \quad (w \neq i)$$

よって, 点 w は中心が $\frac{1}{2}i$, 半径が $\frac{1}{2}$ の円を描く

ただし, 点 i は除く

(3) 点 w が実軸上を動くとき,

$$w - \bar{w} = 0$$

$z \neq 2$ のとき

$$\frac{iz}{z-2} - \overline{\left(\frac{iz}{z-2} \right)} = 0$$

$$\frac{iz}{z-2} = \frac{-i\bar{z}}{\bar{z}-2}$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = 1$$

$$(z-1)\overline{(z-1)} = 1$$

$$|z-1|^2 = 1$$

$$|z-1| = 1 \quad (z \neq 2)$$

よって、点 z は中心が 1 ，半径が 1 の円を描く

ただし、点 2 は除く

例6

α, β を複素数とする．点 z が複素数平面上を動くとき， $w = \frac{\alpha z + \beta}{z + 2}$ ($z \neq -2$) とおく．

(1) $z=1$ ならば $w=1$ になるとき， β を α で表せ．

(2) (1) が成り立ち，更に z が円 $|z|=1$ 上を動くときに， w は円 $|w+1|=2$ 上を動くとする．このときの α, β の値を求めよ．

解説

$$(1) w = \frac{\alpha z + \beta}{z + 2} \quad (z \neq -2) \dots \textcircled{1}$$

$z=1, w=1$ のとき

$$1 = \frac{\alpha + \beta}{3} \quad \therefore \beta = 3 - \alpha \dots \textcircled{2}$$

(2) ①，②より

$$w + 1 = \frac{\alpha z + (3 - \alpha)}{z + 2} + 1 = \frac{(\alpha + 1)z + (5 - \alpha)}{z + 2}$$

$|w + 1| = 2$ より

$$\left| \frac{(\alpha + 1)z + (5 - \alpha)}{z + 2} \right| = 2$$

$$|(\alpha + 1)z + (5 - \alpha)| = 2|z + 2|$$

$|z|=1$ より $z = -1, z = i$ として

$$|-2\alpha + 4| = 2, |(-1 + i)\alpha + 5 + i| = 2|2 + i|$$

$$|\alpha - 2| = 1, |\alpha - (2 + 3i)| = \sqrt{10}$$

であることが必要

$$|\alpha - 2| = 1 \text{ より}$$

$$\alpha \bar{\alpha} - 2\alpha - 2\bar{\alpha} + 3 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$|\alpha - (2 + 3i)| = \sqrt{10}$$

$$\alpha \bar{\alpha} - (2 - 3i)\alpha - (2 + 3i)\bar{\alpha} + 3 = 0 \dots \textcircled{2}$$

② - ① より

$$3i\alpha - 3i\bar{\alpha} = 0 \quad \therefore \bar{\alpha} = \alpha$$

よって、 α は実数

また、 $|\alpha - 2| = 1$ より、 $\alpha = 1, 3$

$\alpha = 1$ のとき、②より、 $\beta = 2$

①より、 $w = \frac{z+2}{z+2} = 1$ (実数) となり不適

$\alpha = 3$ のとき、②より、 $\beta = 0$

例7

z を複素数とし、複素数平面上に3つの領域 $\frac{z + \bar{z}}{2} \geq 0 \dots\dots \textcircled{1}$,

$\frac{z - \bar{z}}{2i} \geq 0 \dots\dots \textcircled{2}$, $\frac{z}{1+i} + \frac{\bar{z}}{1-i} \geq 1 \dots\dots \textcircled{3}$ が与えられている。ただ

し、 $\bar{z}$ は z の共役複素数とする。

(1) ①, ② を同時に満たす点 z の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) ①, ②, ③ を同時に満たす点 z の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が ①, ②, ③ を同時に満たす範囲を動くとき、点 $w = \frac{z+2i}{z}$

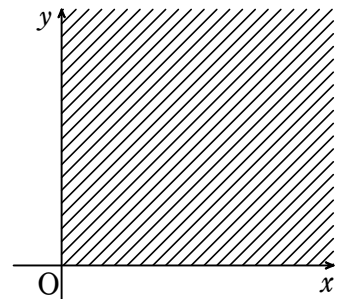
の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

解説

(1) ①, ②より

$$\operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0$$

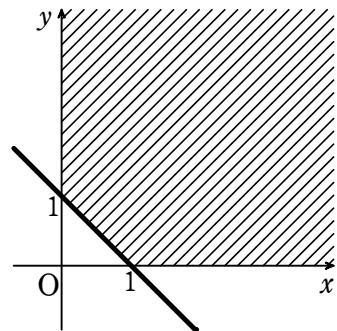
より, z の存在範囲は図の斜線部
ただし, 境界線上の点を含む



(2) $z = x + yi$ (x, y は実数) とすると,

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+i} + \frac{\bar{z}}{1-i} &= \frac{z(1-i) + \bar{z}(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2i} \geq 1 \\ \therefore x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

より, z の存在範囲は図の斜線部
ただし, 境界線上の点を含む



(3) $w = \frac{z+2i}{z}$ より

$$wz = z + 2i$$

$$(w-1)z = 2i$$

$w=1$ のとき, 等号は成り立たないので, $w \neq 1$ より

$$z = \frac{2i}{w-1} \quad (w \neq 1)$$

①より

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \left(\frac{2i}{w-1} - \frac{2i}{\overline{w-1}} \right) = \frac{\bar{w} - w}{|w-1|^2} i \geq 0$$

$|w-1|^2 > 0$ より

$$(\bar{w} - w)i \geq 0$$

$w = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$-2yi^2 = 2y \geq 0 \quad \therefore y \geq 0$$

②より

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{2i}{w-1} + \frac{2i}{\overline{w-1}} \right) = \frac{w + \bar{w} - 2}{|w-1|^2} \geq 0$$

$|w-1|^2 > 0$ より

$$w + \bar{w} - 2 \geq 0$$

$$2x - 2 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$$

③より

$$\begin{aligned} \frac{z}{1+i} + \frac{\bar{z}}{1-i} &= \frac{z + \bar{z}}{2} + \frac{z - \bar{z}}{2i} \\ &= \frac{(\bar{w} - w)i}{|w-1|^2} + \frac{w + \bar{w} - 2}{|w-1|^2} \geq 1 \end{aligned}$$

$|w-1|^2 > 0$ より

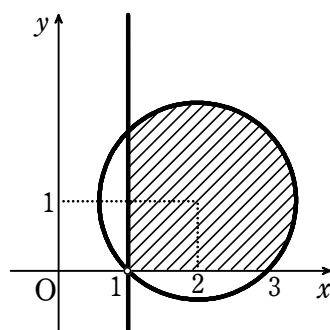
$$(1-i)w + (1+i)\bar{w} - 2 \geq |w-1|^2$$

$$w\bar{w} - (2-i)w - (2+i)\bar{w} \leq -3$$

$$|w - (2+i)|^2 \leq 2$$

$$\therefore |w - (2+i)| \leq \sqrt{2}$$

点 w は点 $2+i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の内部および周上であり，実部が 1 以上，虚部が 0 以上である．ただし，点 1 を除く（右図）



(5) ジューコフスキー変換 $\left(w = z + \frac{r^2}{z}\right)$

例8

i を虚数単位とする。

(1) 等式 $2\left|z - \frac{i}{3}\right| = \left|z - \frac{4i}{3}\right|$ を満たす複素数 z を極形式で表せ。

(2) 0 でない複素数 z が (1) の等式を満たしながら変化するとき，複素数 $z + \frac{1}{z}$ は，複素数平面上でどのような図形を描くか。その概形をかけ。

(3) 0 でない複素数 w が $|w-1| = |w-i|$ を満たしながら変化するとき，複素数 $w + \frac{1}{w}$ は，複素数平面上でどのような図形を描くか。その概形をかけ。

解説

(1) $2\left|z - \frac{i}{3}\right| = \left|z - \frac{4i}{3}\right|$ より

$$4\left|z - \frac{i}{3}\right|^2 = \left|z - \frac{4i}{3}\right|^2$$

$$4\left(z - \frac{i}{3}\right)\overline{\left(z - \frac{i}{3}\right)} = \left(z - \frac{4i}{3}\right)\overline{\left(z - \frac{4i}{3}\right)}$$

$$4\left(z - \frac{i}{3}\right)\left(\overline{z} + \frac{i}{3}\right) = \left(z - \frac{4i}{3}\right)\left(\overline{z} + \frac{4i}{3}\right)$$

$$\overline{z}z = \frac{4}{9}$$

$$|z|^2 = \frac{4}{9} \quad \therefore |z| = \frac{2}{3}$$

よって、 z を極形式で表すと

$$z = \frac{2}{3}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$(2) \frac{1}{z} = \frac{3}{2}\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= \frac{2}{3}(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{3}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \frac{13}{6} \cos \theta - \frac{5}{6} i \sin \theta \end{aligned}$$

$z + \frac{1}{z} = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$x = \frac{13}{6} \cos \theta, \quad y = -\frac{5}{6} \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{6}{13} x, \quad \sin \theta = -\frac{6}{5} y$$

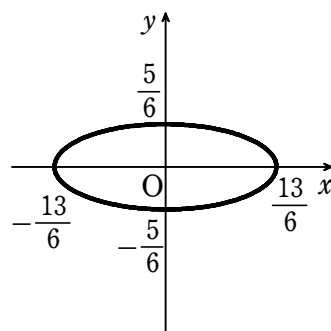
$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より

$$\left(\frac{6}{13}x\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}y\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{\left(\frac{13}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1$$

よって、複素数 $z + \frac{1}{z}$ は、複素数平面上で

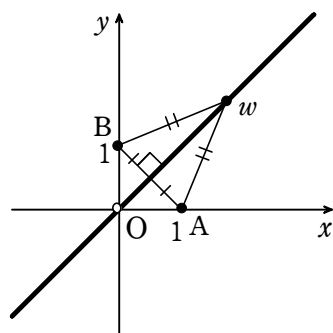
楕円 $\frac{x^2}{\left(\frac{13}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1$ を描き、概形は右図



(3) w は複素数平面上で 2 点 $A(1)$, $B(i)$ を結ぶ線分の垂直二等分線上にあるから

$$w = t(1+i) \quad (t \text{ は実数, } t \neq 0)$$

$$\begin{aligned} w + \frac{1}{w} &= t(1+i) + \frac{1}{t(1+i)} \\ &= t(1+i) + \frac{1}{2t}(1-i) \\ &= t + \frac{1}{2t} + \left(t - \frac{1}{2t}\right)i \end{aligned}$$



$$w + \frac{1}{w} = x + yi \quad (x, y \text{ は実数}) \text{ とおくと}$$

$$x = t + \frac{1}{2t}, \quad y = t - \frac{1}{2t}$$

$$\left(t + \frac{1}{2t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2t}\right)^2 = 2 \text{ より}$$

$$x^2 - y^2 = 2$$

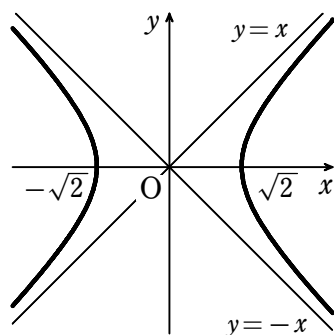
$$t \neq 0 \text{ のとき, } x = t + \frac{1}{2t} \text{ は}$$

$x \leq -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leq x$ の範囲のすべての実数値をとり

$y = t - \frac{1}{2t}$ はすべての実数値をとりうる。

よって、複素数 $w + \frac{1}{w}$ は、複素数平面上で

双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を描き、概形は右図



補1

複素数平面上で、原点を中心とする半径1の円を C とする。

(1) $0 < |z| < 1$ とし、 C 上の相異なる2点 α, β を結ぶ線分の中点が z に等しいとする。このとき α, β を z を用いて表せ。

(2) (1) で求めた α, β における円 C の接線をそれぞれ ℓ, m とする。 ℓ と m の交点を w とするとき、 w を z を用いて表せ。

(3) 点 z は点 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ と点 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ を結ぶ線分上を動く。ただし、両端の点 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ は除く。このとき、(2) で求めた点 w が描く曲線を図示せよ。

解説

原点を O とする。

(1) 条件より、 $z = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha \neq \beta$

$\beta = 2z - \alpha$, $|\beta| = 1$ より

$$|2z - \alpha| = |\alpha|$$

$$(2z - \alpha)(2\bar{z} - \bar{\alpha}) = |\alpha|^2$$

$$4|z|^2 - 2\bar{\alpha}z - 2\alpha\bar{z} + |\alpha|^2 = |\alpha|^2$$

$|\alpha| = 1$ から、 $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ より

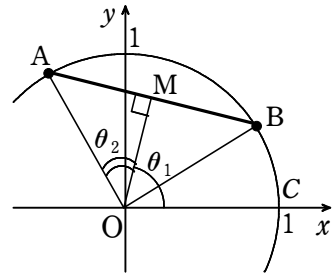
$$\bar{z}\alpha - 2|z|^2 + \frac{z}{\alpha} = 0$$

$$\bar{z}\alpha^2 - 2|z|^2\alpha + z = 0$$

対称性から、同様にして、 $\bar{z}\beta^2 - 2|z|^2\beta + z = 0$

よって、 α, β は $\bar{z}t^2 - 2|z|^2t + z = 0$ の解であり、これを解いて、

$$\frac{|z|^2 \pm \sqrt{|z|^4 - |z|^2}}{\bar{z}} = \frac{|z|^2 \pm |z|\sqrt{1 - |z|^2}i}{\bar{z}} = z \pm \frac{\sqrt{1 - |z|^2}}{|z|}zi$$



(2) 複素数 w が表す点を P とする

$\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ であるから、点 A, B は直線 OP に関して対称な位置にある

よって、線分 AB の中点 M は直線 OP 上にある

また、 $\triangle PAO$ と $\triangle AMO$ について

$$\angle PAO = \angle AMO = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle AOP = \angle MOA \text{ (共通)}$$

より、 $\triangle PAO \sim \triangle AMO$

よって、 $\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OM}$ であるから

$$OP = \frac{OA^2}{OM} = \frac{1}{|z|}$$

w は z と同じ偏角をもつ複素数で、 $|w| = OP = \frac{1}{|z|}$ より

$$w = OP \cdot \frac{z}{|z|}$$

$$\therefore w = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

(3) z は、 $z + \bar{z} = 1, |z| < 1$ を満たす

$\bar{z} = \frac{1}{w}$ から $z = \frac{1}{w}$ より

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{w} = 1, \left| \frac{1}{w} \right| < 1$$

$$w \bar{w} - w - \bar{w} = 0, |\bar{w}| > 1$$

$$(w-1)(\bar{w}-1) = 1, |w| > 1$$

$$\therefore |w-1| = 1, |w| > 1$$

よって、 w が描く曲線は右図

ただし、端点は除く

