

3.6 物理への応用・近似

(1) 直線上の点の運動

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を x とすると、 x は t の関数である。この関数を $x=f(t)$ とすると、 t の増分 Δt に対する $f(t)$ の平均変化率 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ は、時刻 t から $t+\Delta t$ に変わる間の点 P の平均速度を表す。この平均速度において、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときの極限値を、時刻 t における点 P の速度という。点 P の速度を v とすると、

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

となる。また、速度 v の絶対値 $|v|$ を、点 P の速さという。

さらに、速度 v の時刻 t における変化率 α を、点 P の加速度という。すなわち、

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

また、 $|\alpha|$ を加速度の大きさという。

以上のことをまとめると、次のようになる。

速度・加速度

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=f(t)$ とすると、点 P の時刻 t における速度 v 、加速度 α は

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t), \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

例1

原点 O から出発して数直線上を運動する物体の t 秒後の座標 x は $x = -3t^3 + 6t^2$ である。

- (1) この物体が運動の向きを変えるのはいつか。また、そのときの座標を求めよ。
- (2) この物体が出発点に戻るのはいつか。また、そのときの速度と加速度を求めよ。

解説

$$(1) x = -3t^3 + 6t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -9t^2 + 12t = -3t(3t - 4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -18t + 12$$

運動の向きを変えるのは、

速度 $\frac{dx}{dt}$ の符号が変わるときであるから、

$$t > 0 \text{ より, } t = \frac{4}{3} \text{ (秒)}$$

$$\text{このとき, } x = -3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

(2) $x=0$ となるのは

$$-3t^3 + 6t^2 = 0$$

$$t^2(t-2) = 0$$

$$t > 0 \text{ より, } t = 2 \text{ (秒)}$$

このとき、

$$\text{速度は } -9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = -12 \text{ より } -12 / \text{秒}$$

$$\text{加速度は } -18 \cdot 2 + 12 = -24 / \text{秒}^2$$

(2) 平面上の点の運動

座標平面上を運動する点 P の速度と加速度について考える。

時刻 t における点 P の座標を (x, y) とすると、 x, y は t の関数となる。

このとき、点 P から x 軸、 y 軸に下ろした垂線をそれぞれ PQ, PR とすると、P が運動するのにあわせて、点 Q は x 軸上を、点 R は y 軸上を運動する。そして、時刻 t における

$$\text{点 Q の速度は } \frac{dx}{dt}, \text{ 点 R の速度は } \frac{dy}{dt}$$

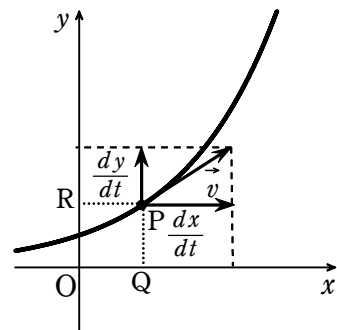
で表される。これらを点 P の

x 軸方向の速度、 y 軸方向の速度

といい、これらを成分とするベクトル

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

を、時刻 t における点 P の速度、または速度ベクトルという。



また、 $\vec{v}$ の大きさ

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

を、時刻 t における点 P の速さという。

さらに、時刻 t における点 Q, R の加速度を成分とするベクトル

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

を点 P の加速度、または、加速度ベクトルといい、

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

を加速度の大きさという。

これらをまとめると、次のようになる。

速度・加速度

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が t の関数であるとき、点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}$ ，速さ $|\vec{v}|$ ，加速度 $\vec{\alpha}$ ，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ は

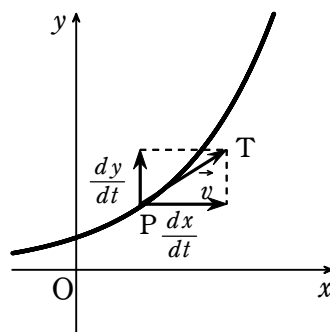
$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right), \quad |\vec{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

なお、点 P の速度 $\vec{v}$ を、右図のように
 $\vec{v} = \overrightarrow{PT}$ と表すと、直線 PT の傾きは

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

であるから、直線 PT は点 P の描く曲線の P における接線である。



例2

座標平面上を運動する点 $P(x, y)$ があり， x 座標および y 座標が時刻 t の関数として $x = \sin 2t$ ， $y = \sin 3t$ で与えられているとする。時刻 $t = \frac{\pi}{12}$ における点 P の速度 $\vec{v}$ および加速度 $\vec{a}$ を求めよ。

(解説)

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (2\cos 2t, 3\cos 3t)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (-4\sin 2t, -9\sin 3t)$$

$t = \frac{\pi}{12}$ のとき

$$\vec{v} = \left(2\cos \frac{\pi}{6}, 3\cos \frac{\pi}{4} \right) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{a} = \left(-4\sin \frac{\pi}{6}, -9\sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(-2, -\frac{9\sqrt{2}}{2} \right)$$

(3) その他の物理への応用**例3**

表面積が $4\pi \text{ cm}^2/\text{秒}$ の一定の割合で増加している球がある．半径が 10 cm になった瞬間において，以下のものを求めよ．

- (1) 半径の増加する速度
- (2) 体積の増加する速度

(解説)

(1) 半径が $r \text{ cm}$ のときの球の表面積を $S \text{ cm}^2$ とすると，
 $S = 4\pi r^2$ より

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt} \quad \therefore \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} \cdot \frac{1}{8\pi r}$$

$\frac{dS}{dt} = 4\pi$ ， $r = 10$ のとき

$$\frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot \frac{1}{8\pi \cdot 10} = \frac{1}{20}$$

よって，求める速度は $\frac{1}{20} \text{ cm/秒}$

(2) 半径が r cm のときの球の体積を V cm³ とすると、

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ より}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$r = 10 \text{ のとき, } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{20} \text{ より}$$

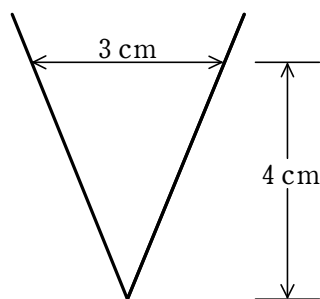
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{20} = 20\pi$$

よって、求める速度は 20π cm³/秒

例4

右図のような底無しの四角錐を逆さまにした容器がある。高さ 4 cm の所で水平断面は 1 辺 3 cm の正方形である。

この容器に 9 cm³/s で静かに水を入れるとき、水の深さが 2 cm になる瞬間の水面が上昇する速さは何 cm/s か。



解説

時刻 t における水の体積を V cm³ とする

時刻 t における水面の正方形の 1 辺の長さを a cm, 水の深さを h cm とすると

$$a : 3 = h : 4 \text{ より, } a = \frac{3}{4}h$$

よって、

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{3}{16}h^3$$

$$\text{両辺を } t \text{ で微分して, } \frac{dV}{dt} = \frac{9}{16}h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ (cm}^3\text{/s) より}$$

$$9 = \frac{9}{16}h^2 \frac{dh}{dt} \text{ から } \frac{dh}{dt} = \frac{16}{h^2}$$

$$h = 2 \text{ のとき, } \frac{dh}{dt} = \frac{16}{2^2} = 4 \text{ (cm/s)}$$

(4) 近似式

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、 $x=a$ の近くにおける $f(x)$ の値を近似する式を求めます。

微分係数 $f'(a)$ は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

よって、 $|h|$ が十分小さいとき

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \doteq f'(a)$$

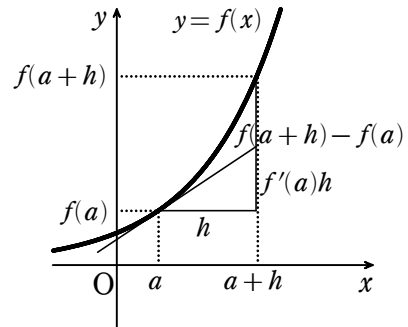
となります。すなわち

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

この式において、 $a=0, h=x$ とおくと、 $|x|$ が十分小さいとき

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$$

以上のことをまとめると、次のようになります。



1次の近似式

1. $|h|$ が十分小さいとき、 $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$

2. $|x|$ が十分小さいとき、 $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$

例5

$\cos 61^\circ$ の近似値を求めたい。 $y = \cos x$ の1次の近似式を用いて計算し、小数第3位を四捨五入すると、 $\cos 61^\circ \doteq \boxed{}$ を得る。ただし、 $\pi = 3.14$ 、 $\sqrt{3} = 1.73$ として用いてよい。

解説

$$(\cos x)' = -\sin x$$

よって、 $h \doteq 0$ のとき

$$\cos(x+h) \doteq \cos x - h \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad h = \frac{\pi}{180} \quad \text{として}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right) &\doteq \cos \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.5 - \frac{3.14 \times 1.73}{360} \\ &= 0.484 \dots \end{aligned}$$

よって、 $\cos 61^\circ \doteq 0.48$

例6

関数 $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ について、 $|x|$ が十分小さいとき、 $f(x)$ の近似式を求めよ。

(解説)

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

よって、 $|x|$ が十分小さいとき

$$f(x) \doteq f'(0)x + f(0) = \frac{x}{2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = x - 1$$

補1

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$ およびその大きさ $|\vec{v}|$ を求めよ。
- (2) $t = \frac{\pi}{2}$ のとき, ベクトル $\vec{v}$ が x 軸の正の向きとのなす角 α を求めよ。
- (3) 原点を O とするとき, ベクトル $\vec{v}$ とベクトル $\overrightarrow{OP}$ のなす角 θ は一定であることを示し, θ を求めよ。

解説

$$(1) \frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t) \text{ より}$$

$$\vec{v} = (e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t))$$

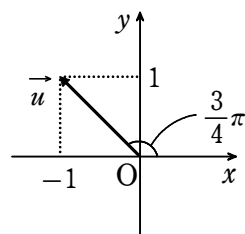
よって

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{\{e^t (\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t (\sin t + \cos t)\}^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} (1 - 2 \sin t \cos t) + e^{2t} (1 + 2 \sin t \cos t)} \\ &= \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2} e^t \end{aligned}$$

$$(2) t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \vec{v} = \left(-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}(-1, 1)$$

$$\vec{u} = (-1, 1) \text{ とおくと,}$$

$$\vec{v} \text{ と } \vec{u} \text{ は同じ向きであるから, } \alpha = \frac{3}{4}\pi$$



$$(3) \overrightarrow{OP} = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = e^t \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{v}| |\overrightarrow{OP}|} = \frac{e^{2t} (\cos t - \sin t) \cos t + e^{2t} (\sin t + \cos t) \sin t}{\sqrt{2} e^t \cdot e^t} \\ &= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ であり,}$$

$\vec{v}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角 θ は一定

補2

曲線 $y=x^2$ の上を動く点 $P(x, y)$ がある。この動点の速度ベクトルの大きさが一定 C のとき、次の問いに答えよ。ただし、動点 $P(x, y)$ は時刻 t に対して x が増加するように動くとする。

- (1) $P(x, y)$ の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ を x で表せ。
- (2) $P(x, y)$ の加速度ベクトル $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right)$ を x で表せ。
- (3) 半径 r の円 $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ 上を、速度ベクトルの大きさが一定 C で動く点 Q があるとき、この加速度ベクトルの大きさを求めよ。
- (4) 動点 P と Q の原点 $(0, 0)$ での加速度ベクトルの大きさが等しくなるときの、半径 r を求めよ。

解説

- (1) $y=x^2$ の両辺を t で微分すると

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$|\vec{v}|^2 = C^2 \text{ より}$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = C^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(2x \frac{dx}{dt} \right)^2 = C^2 \quad \therefore \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{C^2}{4x^2 + 1}$$

$P(x, y)$ は時刻 t に対して x が増加するように動くから、 $\frac{dx}{dt} \geq 0$ より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{\sqrt{4x^2 + 1}} \quad \frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = \frac{2Cx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

よって

$$\vec{v} = \left(\frac{C}{\sqrt{4x^2 + 1}}, \frac{2Cx}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right)$$

- (2) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) \cdot \frac{dx}{dt}$ (合成関数の微分) より

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{\sqrt{4x^2 + 1}} \right) \cdot \frac{C}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\ &= C^2 \cdot \frac{-8x}{2(4x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} = -\frac{4C^2x}{(4x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(2x \frac{dx}{dt} \right) = 2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + 2x \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{積の微分}) \\ &= \frac{2C^2(4x^2+1) - 8C^2x^2}{(4x^2+1)^2} = \frac{2C^2}{(4x^2+1)^2}\end{aligned}$$

よって,

$$\vec{\alpha} = \left(-\frac{4C^2x}{(4x^2+1)^2}, \frac{2C^2}{(4x^2+1)^2} \right)$$

(3) 点 Q は中心 $(0, r)$, 半径 r の円周上で等速円運動をする
角速度を $\omega (>0)$, 点 Q の時刻 0 における座標を (r, r) とすると,
点 Q の時刻 s における座標 (x, y) は

$$(x, y) = (r \cos \omega s, r + r \sin \omega s)$$

における

$$\frac{dx}{ds} = -r\omega \sin \omega s, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -r\omega^2 \cos \omega s$$

$$\frac{dy}{ds} = r\omega \cos \omega s, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -r\omega^2 \sin \omega s$$

点 Q の速度ベクトルの大きさが C より

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = C^2$$

$$(-r\omega \sin \omega s)^2 + (r\omega \cos \omega s)^2 = C^2 \quad \therefore r^2 \omega^2 = C^2$$

$$C, r, \omega > 0 \text{ より, } \omega = \frac{C}{r}$$

よって, 点 Q の加速度ベクトルの大きさは

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2} &= \sqrt{(-r\omega^2 \cos \omega s)^2 + (-r\omega^2 \sin \omega s)^2} = \sqrt{r^2 \omega^4} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot \left(\frac{C}{r} \right)^4} = \frac{C^2}{r} \quad (r > 0 \text{ より})\end{aligned}$$

(4) 原点 O での P の加速度ベクトルは,

(2) で $x=0$ として, $\vec{\alpha} = (0, 2C^2)$ より

$$|\vec{\alpha}| = 2C^2$$

Q の加速度ベクトルの大きさは, 一定値 $\frac{C^2}{r}$ より

$$2C^2 = \frac{C^2}{r} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$