1 [2008 同志社大]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(2) $b_1=2$, $b_{n+1}=2b_n+n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(3) $c_1=2$, $c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1) $a_{n+1}=2a_n+1$　　$\alpha=2\alpha+1$　$\therefore \alpha=-1$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=4$

公比2の等比数列より

$a_n+1=4\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n+1}-1$ //

(2) $b_{n+1}=2b_n+n$

$b_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{b_n-(\alpha n+\beta)\}$ とおくと

$b_{n+1}=2b_n-\alpha n+\alpha-\beta$

$\begin{cases} -\alpha=1 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases}$　$\therefore \alpha=-1,\ \beta=-1$

よって

$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$

$\{b_n+n+1\}$ は初項 $b_1+2=4$

公比2の等比数列より

$b_n+n+1=4\cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n=4\cdot 2^{n-1}-n-1$ //

(3) $c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$

$c_{n+1}-\{\alpha\underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2n+1}+\beta(n+1)+\gamma\}=2\{c_n-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\}$ とおくと

$c_{n+1}=2c_n-\alpha n^2+(2\alpha-\beta)n+\alpha+\beta-\gamma$

$\begin{cases} -\alpha=\frac{1}{2} \\ 2\alpha-\beta=-\frac{1}{2} \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \end{cases}$　$\therefore \alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2},\ \gamma=-1$

よって

$c_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)+1=2(c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1)$

$\{c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\}$ は初項 $c_1+2=4$

公比2の等比数列より

$c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1=4\cdot 2^{n-1}$

$\therefore c_n=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$ //

2 [神戸大]

$a_1=0, a_{n+1}=3a_n+2^n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

3 [2021 高知大]

数列 $\{a_n\}$ は, $a_1=1$, および, すべての自然数 m に対して, $a_{2m}=a_{2m-1}+1$, $a_{2m+1}=2a_{2m}$ を満たすとする。

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(1) $a_2=a_1+1=2$

$a_3=2a_2=4$

$a_4=a_3+1=5$

$a_5=2a_4=10$ //

(2) $a_{2m+1}=2a_{2m}$　　$\alpha=2\alpha+2$

$=2(a_{2m-1}+1)$　$\therefore \alpha=-2$

$=2a_{2m-1}+2$ $(m\geqq 1)$

$a_{2m+1}+2=2(a_{2m-1}+2)$

$\{a_{2m-1}+2\}$ は初項 $a_1+2=3$

公比2の等比数列より

$a_{2m-1}+2=3\cdot 2^{m-1}$　$n=2m-1$ とおくと

$\therefore a_{2m-1}=3\cdot 2^{m-1}-2$　$m=\frac{n+1}{2}$

$a_{2m}=a_{2m-1}+1=3\cdot 2^{m-1}-1$

$n=2m$ とおくと

よって　$m=\frac{n}{2}$

$a_n=\begin{cases} 3\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-2 & (n=2m-1) \\ 3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}-1 & (n=2m) \end{cases}$ //

(3)(i) $n=2m-1$ のとき

$\sum_{k=1}^{2m-1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m-1} a_{2k}$

$=\sum_{k=1}^{m}(3\cdot 2^{k-1}-2)+\sum_{k=1}^{m-1}(3\cdot 2^{k-1}-1)$

$=3\cdot\sum_{k=1}^{2m-1} 2^{k-1}-2m-(m-1)$

$=3\cdot\frac{2^{2m-1}-1}{2-1}-3m+1$

$=3\cdot 2^{2m-1}-3m-2$

$=3\cdot 2^n-\frac{3}{2}n-\frac{7}{2}$

$n=2m$ のとき

$\sum_{k=1}^{2m} a_k=3\cdot 2^n-\frac{3}{2}n-\frac{7}{2}+3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}-1$

$=3\cdot 2^n+3\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}-\frac{3}{2}n-\frac{9}{2}$ //

4 [2001 山口大]

$a_1=2$, $a_2=4$, $2a_{n+2}=a_n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

5 [2022 徳島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$a_1=1$, $a_{2n}=3a_{2n-1}$, $a_{2n+1}=a_{2n}+3^{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) n を自然数とするとき, a_{2n} および a_{2n-1} をそれぞれ n の式で表せ。

(3) m を自然数とするとき, $\sum_{n=1}^{2m} a_n$ を求めよ。

6 [2016 同志社大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ は $m=0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対し

$n=3m$　　のとき　$a_{n+1}=a_n+1$

$n=3m+1$ のとき　$a_{n+1}=2a_n$

$n=3m+2$ のとき　$a_{n+1}=a_n-1$

を満たす。$a_0=0$, $a_1=1$ として, 次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 をそれぞれ求めよ。

(2) a_{3m+4} を a_{3m+1} を用いて表せ。

(3) a_{3m+1} を m を用いて表せ。

(4) a_{3m+2} と a_{3m+3} を m を用いてそれぞれ表せ。

(5) $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ とする。$n=3m$ $(m=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ のとき S_n を m を用いて表せ。

$\boxed{7}$［東京医科歯科大］

(1) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{7}{4},\ a_n=\frac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\ (n=3, 4, 5, \cdots\cdots)$

(2) 次のように定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

$b_1=2,\ b_2=\frac{5}{2},\ b_3=\frac{17}{4},\ b_n=\frac{7}{2}b_{n-1}-\frac{7}{2}b_{n-2}+b_{n-3}\ (n=4, 5, 6, \cdots\cdots)$

(1) $a_n=\frac52 a_{n-1}-a_{n-2}$ $(n=3,4,\cdots)$

$a_{n+2}-\frac52 a_{n+1}+a_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$

$x^2-\frac52 x+1=0$
$2x^2-5x+2=0$
$\therefore x=2,\ \frac12$

・$a_{n+2}-2a_{n+1}=\frac12(a_{n+1}-2a_n)$

$\{a_{n+1}-2a_n\}$は初項 $a_2-2a_1=\frac34$

公比$\frac12$の等比数列より

$a_{n+1}-2a_n=\frac34\cdot\left(\frac12\right)^{n-1}$ …①

・$a_{n+2}-\frac12 a_{n+1}=2\left(a_{n+1}-\frac12 a_n\right)$

$\{a_{n+1}-\frac12 a_n\}$は初項 $a_2-\frac12 a_1=\frac32$

公比2の等比数列より

$a_{n+1}-\frac12 a_n=\frac32\cdot 2^{n-1}$ …②

②−①より

$\frac32 a_n=\frac32\cdot 2^{n-1}-\frac34\left(\frac12\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=2^{n-1}-\left(\frac12\right)^n$ //

(2) $b_{n+3}=\frac72 b_{n+2}-\frac72 b_{n+1}+b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$b_{n+3}-\frac52 b_{n+2}+b_{n+1}=b_{n+2}-\frac52 b_{n+1}+b_n$

$\{b_{n+2}-\frac52 b_{n+1}+b_n\}$は初項 $b_3-\frac52 b_2+b_1=\frac{17}{4}-\frac{25}{4}+2=0$

の定数列より

$b_{n+2}-\frac52 b_{n+1}+b_n=0$, $b_1=2$, $b_2=\frac52$

あとは(1)同様

$\boxed{9}$［(1) 東北大　(2) 関西学院大］

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2,\ a_2=0,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定義されているとする．このとき，一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=0,\ a_2=1,\ a_n+a_{n-1}-2a_{n-2}=2^{n-2}\ (n\geqq 3)$ によって定められているとする．このとき，一般項 a_n を求めよ．

(1) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=2n-8$

$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$　$\therefore x=1$

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2n-8$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと $b_1=a_2-a_1=-2$

$b_{n+1}=b_n+2n-8$

$\underbrace{b_{n+1}-b_n}_{c_n\text{とする}}=2n-8$

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k$ $(n\geqq2)$

$=-2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-8)$

$=-2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-8(n-1)$

$=(n-1)(n-8)-2$

これは$n=1$のときも成り立つので

$b_n=(n-1)(n-8)-2$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$\underbrace{a_{n+1}-a_n}_{d_n\text{とする}}=n^2-9n+6$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}d_k$ $(n\geqq2)$

$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-9k+6)$

$=2+\frac16(n-1)n(2n-1)-9\cdot\frac12(n-1)n+6(n-1)$

$2n^2-28n+36$　　$n^2-14n+18$

$=2+\frac16(n-1)\{n(2n-1)-27n+36\}$

$=2+\frac13(n-1)(n^2-14n+18)$ $(n\geqq2)$

これは$n=1$のときも成り立つので

$a_n=\frac13(n-1)(n^2-14n+18)+2$ $(n\geqq1)$

$\boxed{10}$［2016 横浜市立大］

n を自然数とする。漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0$，$a_1=1$，$a_2=1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{11}$［宮城教育大］

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}-2^n\ (n\geqq2)$ によって定義されている.

(1) $a_{n+1}-a_n$ を n を用いて表せ.

(2) a_n を n を用いて表せ.

$\boxed{8}$［2021 関西大］

n を自然数として，数列 $\{a_n\}$ を $a_{n+3}-4a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$ によって定める。

(1)　3次方程式 $x^3-4x^2+5x-2=0$ の3つの実数解を α，β，γ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ とするとき，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=$ ア $\boxed{\quad}$ である。

(2)　(1)で求めた β，γ に対し，$b_n=a_{n+1}-\beta a_n$，$c_n=b_{n+1}-\gamma b_n$ とおく。このとき，b_{n+2} は b_{n+1} と b_n を用いて $b_{n+2}=$ イ $\boxed{\quad}$ と表すことができ，c_{n+1} は c_n を用いて $c_{n+1}=$ ウ $\boxed{\quad}$ と表すことができる。

(3)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$ とする。

(2)において，$c_1=$ エ $\boxed{\quad}$ である。また，b_n を n を用いて表すと $b_n=$ オ $\boxed{\quad}$ である。さらに，a_n を n を用いて表すと $a_n=$ カ $\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{12}$［室蘭工業大］

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=0,\ a_2=4,\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n+3^n\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を満たしている．さらに，$b_n=a_{n+1}-3a_n$ とおく.

(1) $c_n=b_n-3^n$ とおくとき，c_{n+1} を c_n をを用いて表せ．また，数列 $\{c_n\}$ および数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $d_n=\frac{a_n}{3^{n-1}}$ とおくとき，d_{n+1} を d_n を用いて表せ．また，数列 $\{d_n\}$ および数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

高2数学　夏期講習　漸化式　第1講　漸化式の解き方

13 [1998 島根大]

正の整数 n に対して，整数 a_n，b_n を $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ により定める．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $c_n=a_n-b_n\sqrt{3}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^{n+1}$

$=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$

$=(2+\sqrt{3})(a_n+b_n\sqrt{3})$

$=2a_n+3b_n+(a_n+2b_n)\sqrt{3}$

$a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ は整数より

$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+3b_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \end{cases}$ //

(2) $c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{3}$

$=(2a_n+3b_n)-(a_n+2b_n)\sqrt{3}$

$=2(a_n-\sqrt{3}b_n)-\sqrt{3}(a_n-\sqrt{3}b_n)$

$=(2-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{3}b_n)$　　$a_1+b_1\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$ より $a_1=2, b_1=1$

$=(2-\sqrt{3})c_n$

$\{c_n\}$ は初項 $c_1=a_1-b_1\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$

公比 $2-\sqrt{3}$ の等比数列より

$c_n=(2-\sqrt{3})^n$ //

(3) $\begin{cases} a_n+b_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n \\ a_n-b_n\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^n \end{cases}$ より

$a_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}$

$b_n=\dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ //

14 [2000 岡山理科大]

自然数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，$(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$ により定めるとき，次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $c_n=a_n-b_n\sqrt{5}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

15 [2011 信州大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次のように定められている：

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b_1=\frac{1}{2}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_{n+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $a_n{}^2+b_n{}^2$ を求めよ。

(2) a_{n+3} と a_n の関係式および b_{n+3} と b_n の関係式をそれぞれ求めよ。

(3) a_n，b_n を求めよ。

(1) $a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)^2$

$=a_n^2+b_n^2$

$\{a_n^2+b_n^2\}$ は初項 $a_1^2+b_1^2=1$

の定数列より

$a_n^2+b_n^2=1$ //

(2) $a_{n+3}=\frac{1}{2}a_{n+2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b_{n+2}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}b_{n+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}\right)$

$=-\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}b_{n+1}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)$

$=-a_n$ //

$b_{n+3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+2}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}b_{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}\right)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)$

$=-b_n$ //

(3) $a_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\ a_2=\frac{\sqrt{3}}{2},\ a_3=0,\ a_4=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cdots$

$b_1=\frac{1}{2},\ b_2=-\frac{1}{2},\ b_3=-1,\ b_4=-\frac{1}{2},\ \cdots$

m は自然数

$a_n=\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\ (n=6m-5,\ 6m-4) \\ 0\ (n=6m-3,\ 6m) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\ (n=6m-2,\ 6m-1) \end{cases}$　　$b_n=\begin{cases} \frac{1}{2}\ (n=6m-5,\ 6m-1) \\ -\frac{1}{2}\ (n=6m-4,\ 6m-2) \\ 1\ (n=6m) \\ -1\ (n=6m-3) \end{cases}$ //

16 [2022 福井大]

次の条件によって定められる 2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がある。

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_{n+1}=ax_n-by_n \\ y_{n+1}=bx_n+ay_n \end{cases}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ただし，a，b は，$a^2+b^2=1$ を満たす実数とする。

(1) すべての自然数 n について，$x_n{}^2+y_n{}^2=1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $x_4=x_1$ が成り立つ実数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた実数の組 $(a,\ b)$ のうち $b>0$ を満たす $(a,\ b)$ に対し，$\{y_n\}$ の第 1234 項 y_{1234} を求めよ。

17 [2020 鹿児島大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1=0$，$b_1=1$，および次の漸化式で定める。

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\sqrt{3}b_n \\ b_{n+1}=-\sqrt{3}a_n+b_n \end{cases}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+3}=-8a_n$，$b_{n+3}=-8b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}a_n$ を求めよ。

(4) 次で定まる T の値を求めよ。

$$T=\frac{1}{\sqrt{3}}b_{2020}+\sum_{n=1}^{2020}a_n$$