

高3数学 発展問題演習 5. 三角比

① [2005 滋賀大]

半径 1 の円に内接し、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ である $\triangle ABC$ について、3 辺の長さの和 $AB + BC + CA$ の最大値を求めよ。

② [一橋大]

原点を中心とする半径 1 の円 O の周上に定点 $A(1, 0)$ と動点 P をとる。

- (1) 円 O の周上の点 B, C で $PA^2 + PB^2 + PC^2$ が P の位置によらず一定であるようなものを求めよ。
- (2) 点 B, C が (1) の条件を満たすとき、 $PA + PB + PC$ の最大値と最小値を求めよ。

③ [2011 千葉大]

三角形 ABC の面積は $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ，外接円の半径は 1， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $AB > AC$ である。このとき、三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

④ [上智大]

直角をはさむ辺の長さが 1 の直角二等辺三角形を、一本の直線で切って面積を二等分するとき、線分の長さの最小値を求めよ。

⑤ [2008 九州大]

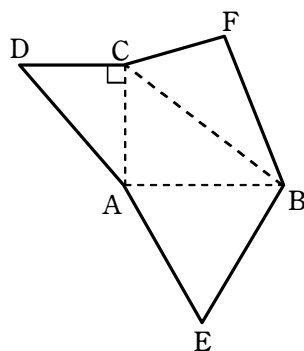
いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円 Q に外接し、かつ、互いに交わらないように配置する。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし、円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、 $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。

高3数学 発展問題演習 5. 三角比

6 [2009 北海道大]

図はある三角錐 V の展開図である。ここで $AB=4$, $AC=3$, $BC=5$, $\angle ACD=90^\circ$ で $\triangle ABE$ は正三角形である。このとき, V の体積を求めよ。



7 [2001 一橋大]

四面体 $OAPQ$ において,

$$|\vec{OA}|=1, \vec{OA} \perp \vec{OP}, \vec{OP} \perp \vec{OQ}, \vec{OA} \perp \vec{OQ}$$

で, $\angle PAQ=30^\circ$ である。

- (1) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ。
- (2) $|\vec{OP}|$ のとりうる範囲を求めよ。
- (3) 四面体 $OAPQ$ の体積 V の最大値を求めよ。

8 [一橋大]

三角すい $ABCD$ において $AB=BC=CA=1$, $DA=DB=DC=d$ が成り立っている。

- (1) d のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 点 P が辺 AB 上を動き, 点 Q が辺 CD 上を動くとき, PQ の長さの最小値を d で表せ。

9 [2013 近畿大]

四面体 $ABCD$ において, $AB=CD=4$, $AC=BD=6$, $BC=5$ である。

- (1) $\cos \angle ABC = \text{ア}$ であり, $\triangle ABC$ の面積は イ である。
- (2) AD のとりうる長さの範囲は ウ $< AD < \text{エ}$ である。
- (3) $ABCD$ の体積は, $AD = \text{オ}$ のとき最大となり, その最大値は カ である。

高3数学 発展問題演習 5. 三角比

10 [2010 岐阜薬科大]

1 辺の長さが 1 の正二十面体 W のすべての頂点が球 S の表面上にあるとき、次の問いに答えよ。なお、正二十面体は、すべての面が合同な正三角形であり、各頂点は 5 つの正三角形に共有されている。

(1) 正二十面体の頂点の総数を求めよ。

(2) 正二十面体 W の 1 つの頂点を A 、頂点 A からの距離が 1 である 5 つの頂点を B ,

C, D, E, F とする。 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ を用いて、正五角形 $BCDEF$ の外接円

の半径 R と対角線 BE の長さを求めよ。

(3) 2 つの頂点 D, E からの距離が 1 である 2 つの頂点のうち、頂点 A でない方を G とする。球 S の直径 BG の長さを求めよ。

(4) 球 S の中心を O とする。 $\triangle DEG$ を底面とする三角錐 $ODEG$ の体積を求めよ。