

第2章 積分法

2.1 積分漸化式・定積分の最大・最小

(1) 積分漸化式

一般に、 n を自然数とすると、 $\sin^n x, \cos^n x, \tan^n x, (\log x)^n$ 等の積分を求めるのに、漸化式を利用して求めることがあります。

例1

数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) と定める。

(1) $n \geq 2$ のとき、 $na_n = (n-1)a_{n-2}$ であることを示せ。

(2) $n \geq 1$ のとき、 $na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(3) $a_n \geq a_{n+1}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) であることを示せ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2$ を求めよ。

解説

$$(1) a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x (-\cos x)' dx$$

$$= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)a_{n-2} - (n-1)a_n$$

よって

$$na_n = (n-1)a_{n-2}$$

(2) $na_n = (n-1)a_{n-2}$ ($n \geq 2$) の両辺に a_{n-1} をかけて

$$na_{n-1}a_n = (n-1)a_{n-2}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

よって、 $n \geq 1$ のとき

$$na_{n-1}a_n = (n-1)a_{n-2}a_{n-1} = \cdots = 1 \cdot a_0a_1$$

ここで、 $a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ より

$$na_{n-1}a_n = 1 \cdot a_0a_1 = \frac{\pi}{2} \quad (n \geq 1)$$

(3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で $0 \leq \sin x \leq 1$ であるから、 $\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \quad \therefore a_n \geq a_{n+1}$$

(4) (3)より

$$a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$$

各辺に na_n (>0) を掛けると

$$na_na_{n+1} \leq na_n^2 \leq na_{n-1}a_n$$

(2)より、 $na_{n-1}a_n = \frac{\pi}{2}$

また、 $(n+1)a_na_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_na_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)a_na_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

よって、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

参考 この公式をワリスの公式 (ウォリスの公式) という。

例2

自然数 n に対して、 $S_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) S_{n+1} を S_n と n の式で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ。

解説

$$\begin{aligned}
(1) \int_1^e \log x \, dx &= \int_1^e (x)' \log x \, dx \\
&= \left[x \log x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \int_1^e dx \\
&= e - \left[x \right]_1^e = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) S_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^{n+1} dx = \int_1^e 1 \cdot (\log x)^{n+1} dx \\
&= \left[x (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x \cdot (n+1) (\log x)^n \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= e - (n+1) \int_1^e (\log x)^n dx \\
&= e - (n+1) S_n
\end{aligned}$$

よって

$$S_{n+1} = e - (n+1) S_n \cdots \textcircled{1}$$

(3) $1 \leq x \leq e$ で, $0 \leq \log x \leq 1$ であるから, $(\log x)^n \geq 0$ より

$$S_n = \int_1^e (\log x)^n dx \geq 0$$

①より

$$e - (n+1) S_n = S_{n+1} \geq 0 \quad \therefore S_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\text{よって, } 0 \leq S_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$

(4) ①より

$$n S_n = e - S_n - S_{n+1}$$

(3)から $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (e - S_n - S_{n+1}) = e - 0 - 0 = e$$

例3

定積分 $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ($n=1, 2, \dots$) について、次の問いに答えよ。

- (1) I_1 を求めよ。
- (2) 等式 $I_n = e - nI_{n-1}$ ($n=2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) I_4 を求めよ。
- (4) 不等式 $\frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。

解説

$$(1) I_1 = \int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

(2) $n=2, 3, \dots$ のとき

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 x^n (e^x)' dx = \left[x^n e^x \right]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - nI_{n-1}$$

(3) (1), (2) の結果を用いると

$$I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \cdot 1 = e - 2$$

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 2) = -2e + 6$$

$$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e + 6) = 9e - 24$$

(4) $0 \leq x \leq 1$ のとき, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ ($n=1, 2, \dots$)

各辺に e^x (>0) を掛けると, $0 \leq x^{n+1} e^x \leq x^n e^x$

等号は常には成り立たないから, $0 < \int_0^1 x^{n+1} e^x dx < \int_0^1 x^n e^x dx$

すなわち, $0 < I_{n+1} < I_n$

(2) から, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ ($n=1, 2, \dots$) より

$$0 < e - (n+1)I_n < I_n \quad \therefore \frac{e}{n+2} < I_n < \frac{e}{n+1}$$

(5) (4) より, $\frac{n}{n+2} e < nI_n < \frac{n}{n+1} e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} e = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} e = e \text{ であるか}$$

ら, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$$

例4

(1) n を正の整数とする. $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ.

(2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m=0, 1, 2, \dots$) を求めよ.

解説

(1) $f_n(t) = e^t - \frac{t^n}{n!}$ とする

(i) $n=1$ のとき

$f_1'(t) = e^t - 1 \geq 0$ ($t \geq 0$) より, $f_1(t)$ は $t \geq 0$ で単調増加

$f_1(t) \geq f_1(0) = 1 > 0$ より成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき成り立つと仮定して

$$f_k(t) = e^t - \frac{t^k}{k!} > 0$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$f_{k+1}(t) = e^t - \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \text{ から}$$

$$f_{k+1}'(t) = e^t - \frac{t^k}{k!} = f_k(t) > 0 \text{ より, } f_{k+1}(t) \text{ は単調増加}$$

$t \geq 0$ のとき, $f_{k+1}(t) \geq f_{k+1}(0) = 1 > 0$ より

$n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より,

すべての正の整数 n について $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つ

(2) $F_m(t) = \int_0^t x^m e^{-x} dx$ とおくと

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \left[-x^m e^{-x} \right]_0^t + \int_0^t m x^{m-1} e^{-x} dx \\ &= -t^m e^{-t} + m F_{m-1}(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{F_m(t)}{m!} = -\frac{1}{m!} t^m e^{-t} + \frac{F_{m-1}(t)}{(m-1)!}$$

$$\therefore \frac{F_m(t)}{m!} - \frac{F_{m-1}(t)}{(m-1)!} = -\frac{1}{m!} t^m e^{-t} \text{ (階差数列)}$$

$$F_0(t) = \int_0^t e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^t = 1 - e^{-t} \text{ より, } I_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t}) = 1$$

$m \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{F_m(t)}{m!} &= \frac{F_0(t)}{0!} - \sum_{k=1}^m \frac{t^k e^{-t}}{k!} \\ &= 1 - e^{-t} - \sum_{k=1}^m \frac{t^k e^{-t}}{k!} \end{aligned}$$

$$\therefore F_m(t) = m! \left(1 - e^{-t} - \sum_{k=1}^m \frac{t^k e^{-t}}{k!} \right)$$

ここで, (1) より

$$0 < \sum_{k=1}^m \frac{t^k e^{-t}}{k!} < \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{t^{k+1}} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^m (k+1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^m (k+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(m+3)}{2t} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理より}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{t^k e^{-t}}{k!} = 0$$

よって

$$I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} F_m(t) = m!$$

これは $m=0$ のときも成り立つ

参考 I_m をガンマ関数という。

例5

負でない整数 m, n に対して, $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ と定義する。

(1) $B(3, 2)$ を求めよ。

(2) $B(m, n)$ を $B(m+1, n-1)$ を使って表せ (ただし, $n \geq 1$ とする)。

(3) $B(m, n)$ を求めよ。

(4) a, b を相異なる実数とする。このとき, $\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx$ を求めよ。

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \quad B(3, 2) &= \int_0^1 x^3(1-x)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad B(m, n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' (1-x)^n dx \\
 &= \left[\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} \right]_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx \\
 &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} dx \\
 &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1)
 \end{aligned}$$

(3) (2)より

$$\begin{aligned}
 B(m, n) &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} B(m+2, n-2) \\
 &= \dots = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{m+n} B(m+n, 0)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } B(m+n, 0) = \int_0^1 x^{m+n} dx = \left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{m+n+1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 B(m, n) &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{m+n+1} \\
 &= \frac{n!}{(m+n+1)(m+n) \cdot \dots \cdot (m+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}
 \end{aligned}$$

これは $n=0$ のときも成り立つから

$$B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(4) $x-a=t$ とおくと, $x=t+a$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

よって

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx = \int_0^{b-a} t^m (t+a-b)^n dt$$

x	$a \rightarrow$	b
t	$0 \rightarrow$	$b-a$

$t = (b-a)u$ とおくと

$$\frac{dt}{du} = b-a$$

t	$0 \rightarrow b-a$
u	$0 \rightarrow 1$

よって

$$\begin{aligned} & \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n dx \\ &= \int_0^1 \{(b-a)u\}^m \{(b-a)u + a-b\}^n \cdot (b-a) du \\ &= (b-a)^{m+1} \int_0^1 u^m \{(b-a)(u-1)\}^n du \\ &= (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 u^m (u-1)^n du \\ &= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \int_0^1 u^m (1-u)^n du \\ &= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} B(m, n) \\ &= (-1)^n (b-a)^{m+n+1} \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

〔参考〕 $B(m, n)$ をベータ関数という。(4) は1/6 公式や1/12公式…を一般化したものである。

(2) 定積分の最大・最小

例6

(1) 定積分 $I = \int_0^\pi (x - a \cos x)^2 dx$ を計算し、 I を最小にする a の値と I の最小値を求めよ。

(2) a, b が実数の範囲を動くとき、定積分 $\int_{-\pi}^\pi (x - a \sin x - b \cos x)^2 dx$ の最小値を求めよ。また、そのときの a, b の値を求めよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \int_0^\pi (x^2 - 2ax \cos x + a^2 \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^\pi x^2 dx - 2a \int_0^\pi x \cos x dx + a^2 \int_0^\pi \cos^2 x dx \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3},$$

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[\cos x \right]_0^{\pi} = -2,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

より

$$I = \frac{\pi}{2}a^2 + 4a + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi}{2} \left(a + \frac{4}{\pi} \right)^2 - \frac{8}{\pi} + \frac{\pi^3}{3}$$

$$I \text{ は } a = -\frac{4}{\pi} \text{ のとき最小で, 最小値は } -\frac{8}{\pi} + \frac{\pi^3}{3}$$

$$(2) (x - a \sin x - b \cos x)^2$$

$$= x^2 + a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x - 2ax \sin x - 2bx \cos x + 2ab \sin x \cos x$$

ここで, $2bx \cos x$, $2ab \sin x \cos x$ は奇関数より

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2bx \cos x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 2ab \sin x \cos x dx = 0$$

また

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a^2 \sin^2 x dx = 2a^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = a^2 \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = a^2 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b^2 \cos^2 x dx = 2b^2 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = b^2 \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = b^2 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2ax \sin x dx = 4a \int_0^{\pi} x \sin x dx = 4a \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi} = 4a\pi$$

より

$$(\text{与式}) = \frac{2}{3} \pi^3 + a^2 \pi + b^2 \pi - 4a\pi = \pi(a-2)^2 + \pi b^2 + \frac{2}{3} \pi^3 - 4\pi$$

よって, $a=2$, $b=0$ のとき最小で, 最小値は $\frac{2}{3} \pi^3 - 4\pi$

補1

$a_n = \int_0^\pi x^n \sin x \, dx$, $b_n = \int_0^\pi x^n \cos x \, dx$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおく.

(1) a_1, b_1 を求めよ.

(2) a_n, b_n ($n \geq 2$) を a_{n-1} または b_{n-1} を用いて表せ.

(3) a_6, b_7 を求めよ.

解説

$$(1) a_1 = \int_0^\pi x \sin x \, dx = \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi = \pi$$

$$b_1 = \int_0^\pi x \cos x \, dx = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^\pi = -2$$

$$(2) a_n = \int_0^\pi x^n \sin x \, dx = \left[-x^n \cos x \right]_0^\pi + n \int_0^\pi x^{n-1} \cos x \, dx = nb_{n-1} + \pi^n$$

$$b_n = \int_0^\pi x^n \cos x \, dx = \left[x^n \sin x \right]_0^\pi - n \int_0^\pi x^{n-1} \sin x \, dx = -na_{n-1}$$

$$\begin{aligned} (3) a_6 &= 6b_5 + \pi^6 = 6(-5a_4) + \pi^6 = -30(4b_3 + \pi^4) + \pi^6 \\ &= -120(-3a_2) - 30\pi^4 + \pi^6 \\ &= 360(2b_1 + \pi^2) - 30\pi^4 + \pi^6 \\ &= \pi^6 - 30\pi^4 + 360\pi^2 - 1440 \end{aligned}$$

$$b_7 = -7a_6 = -7\pi^6 + 210\pi^4 - 2520\pi^2 + 10080$$

補2

n を正の整数とする。 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) $I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$ を示せ。

(2) (1) を用いて I_5 を求めよ。

解説

$$(1) I_{n+2} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n+2}{2}} dx$$

$$= \left[x(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{n+2}{2} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} (-2x) dx$$

$$= (n+2) \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$$

$$= -(n+2) \int_0^1 \{(1-x^2) - 1\} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} dx$$

$$= -(n+2)(I_{n+2} - I_n)$$

よって

$$(n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n$$

$$\therefore I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$$

別解

$$I_{n+2} = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^{n+2} dx$$

$x = \sin \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos \theta \geq 0$ より

$$I_{n+2} = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^{n+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} \theta \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+3} \theta d\theta$$

$$= \left[\sin \theta \cos^{n+2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^{n+1} \theta d\theta$$

$$= (n+2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= (n+2)(I_n - I_{n+2})$$

よって

$$(n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n$$

$$\therefore I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$$

(2) (1) より

$$I_5 = \frac{5}{6} I_3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_1$$

ここで, $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の四分円の面積を表すから $I_1 = \frac{\pi}{4}$

より

$$I_5 = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{32} \pi$$

補3

(1) 関数 $f(x) = \tan x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ とおく。このとき, I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(3) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ の値を求めよ。

解説

(1) $y = f(x)$ の逆関数は $x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$

$x = \tan y$ とすると, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$ より

x	$0 \rightarrow 1$
y	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + \tan^2 y)^{n+1}} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n} y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin y)' \cos^{2n-1} y dy \\ &= \left[\sin y \cos^{2n-1} y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y \cos^{2n-2} y dy \\ &= \frac{1}{2^n} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 y) \cos^{2n-2} y dy \\ &= \frac{1}{2^n} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} y dy - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n} y dy \\ &= \frac{1}{2^n} + (2n-1)I_n - (2n-1)I_{n+1} \\ 2nI_{n+1} &= (2n-1)I_n + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\therefore I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}$$

$$(3) I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$x = \tan y \text{ とおくと, } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \text{ より}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 y} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy = \frac{\pi}{4}$$

(2) より

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{1 \cdot 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{2 \cdot 2^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{16} = \frac{3}{32} \pi + \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{32} \pi + \frac{1}{4}$$

x	$0 \rightarrow 1$
y	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$