

第2章 式と曲線

2.1 2次曲線(1)

(1) 放物線

平面上で、定点 F と、 F を通らない定直線 l からの距離が等しい点 P の軌跡を放物線といい、点 F をその焦点、直線 l を準線という。

$p \neq 0$ とする。点 $F(p, 0)$ を焦点とし、直線 $x = -p$ を準線 l とする放物線の C の方程式を求める。

放物線 C 上の点を $P(x, y)$ とし、 P から l に下ろした垂線を PH とすると

$$PF = PH$$

$$PF^2 = PH^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = \{x - (-p)\}^2$$

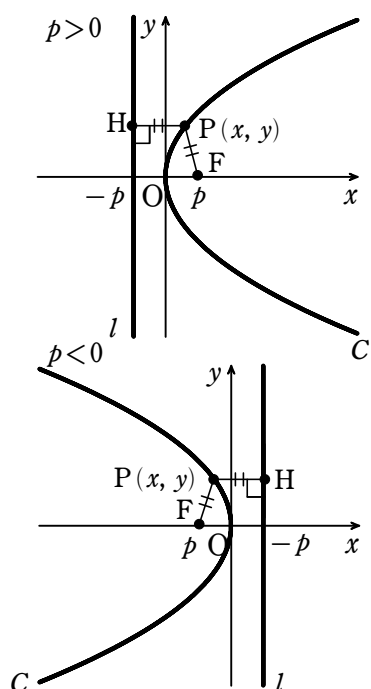
$$\therefore y^2 = 4px$$

これを放物線の方程式の標準形という。

放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を放物線の軸といい、軸と放物線の交点を放物線の頂点という。

放物線は、その軸に関して対称である。

放物線についてまとめると、次のようになる。

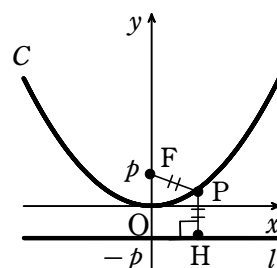


放物線 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) の性質

1. 頂点は原点，焦点は点 $(p, 0)$ ，準線は直線 $x = -p$
2. 軸は x 軸で，放物線は軸に関して対称である

$p \neq 0$ のとき，点 $F(0, p)$ を焦点とし，直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は，上の計算過程において x と y を入れ替えて $x^2 = 4py$ となる。

$a \neq 0$ のとき，放物線 $y = ax^2$ は



$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a} y$ と変形できるから、

$y = ax^2$ の焦点は点 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ ，準線は直線 $y = -\frac{1}{4a}$ である。

例1

(1) 放物線 $y^2 = x$ の焦点は で、準線の方程式は である。

(2) O (0, 0) を原点とする座標平面を考える。このとき、定点 (2, 0) と直線 $x = -2$ から等距離にある点 (x, y) の軌跡 C を表す方程式は

ア $+ x = 0$ である。また、点 $(-2, 0)$ を通る C の接線の傾きは

イ である。

解説

(1) $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} x$ より

焦点は $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ，準線は $x = -\frac{1}{4}$

(2) C を表す方程式は

$$y^2 = 4 \cdot 2x \quad \therefore \text{ア} \quad -\frac{1}{8} y^2 + x = 0$$

点 $(-2, 0)$ を通る接線は、 x 軸、 y 軸に垂直ではないので

$$y = m(x + 2) \quad (m \neq 0)$$

とおける

これが C に接するとき

$$-8x + \{m(x + 2)\}^2 = 0$$

$$m^2 x^2 + 4(m^2 - 2)x + 4m^2 = 0$$

この判別式を D とすると、 $D = 0$ より

$$\frac{D}{4} = \{2(m^2 - 2)\}^2 - m^2 \cdot 4m^2 = -16(m^2 - 1) = 0$$

$$\therefore m = \pm 1$$

よって、求める接線の傾きは $\text{イ} \quad \pm 1$

(2) 楕円

平面上で、異なる 2 定点 F, F' からの距離の和が一定である点 P の軌跡を楕円といい、この 2 点 F, F' を楕円の焦点という。ただし、焦点 F, F' からの距離の和は線分 FF' の長さよりも大きいものとする。

2 定点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の和が $2a$ である楕円 C の方程式を求める。

ここで、 $PF + PF' > FF' = 2|c|$
であるから、 $a > c > 0$ とします。

楕円 C 上の点を $P(x, y)$ とすると

$$PF + PF' = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \{(x+c)^2 + y^2\}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$a^2\{(x+c)^2 + y^2\} = (a^2 + cx)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a > c$ であるから、 $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおくと、

$a > b > 0$ であり

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \textcircled{1}$$

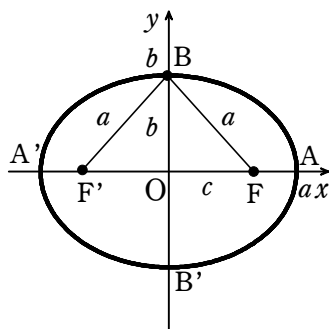
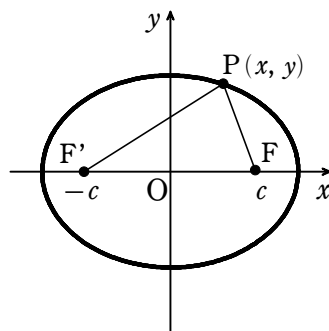
これを楕円の方程式の標準形という。

また、このとき、 $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ とおいたから、 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ より、
2 つの焦点 F, F' の座標は、

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

2 点 F, F' を焦点とする楕円において、直線 FF' のうち楕円が切り取る線分を長軸、長軸の垂直二等分線のうち楕円が切り取る線分を短軸という。また、長軸と短軸の交点を中心、長軸と短軸の端点を頂点という。

楕円①では、頂点は $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), B'(0, -b)$ で、中心は原点 O であり、焦点が x 軸上にあることから線分 AA' が長軸、線分 BB' が短軸である。



楕円は長軸，短軸，中心に関して対称である。このことは，楕円①上の任意の点を $P(x, y)$ として， x 軸， y 軸、原点に関して P と対称な点は，それぞれ $Q(x, -y)$ ， $R(-x, y)$ ， $S(-x, -y)$ であり，この 3 点の座標もまた方程式①を満たすから， Q, R, S も楕円①上にあり，よって，楕円①は x 軸， y 軸、原点に関して，それぞれ対称であるというようにして示される。

楕円についてまとめると，次のようになる。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ の性質

1. 中心は原点，長軸の長さは $2a$ ，短軸の長さは $2b$
2. 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
3. 楕円は x 軸， y 軸，原点に関して対称である
4. 楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$

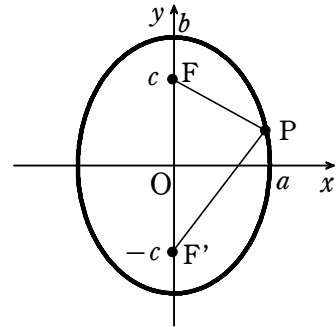
$b > c > 0$ のとき，2 定点 $F(0, c)$ ， $F'(0, -c)$ を焦点とし，この 2 点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は，上の計算過程において， x と y を入れ替えて $\sqrt{b^2 - c^2} = a$ とおくと，
 $b > a > 0$ で

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

となる。

このとき，焦点 F, F' の座標は $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ より，
 $F(0, \sqrt{b^2 - a^2})$ ， $F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$

また，この楕円の長軸は y 軸上，短軸は x 軸上にあり，その長さは，それぞれ $2b, 2a$ である。



例2

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点の座標は と である。また、これらの2つの焦点からこの楕円上の任意の点までの距離の和は である。
- (2) 焦点が $(3, 0)$, $(-3, 0)$ で、長軸の長さが10のだ円の方程式を求めよ。
- (3) 平面上の2点 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ からの距離の和が4である点の軌跡の方程式を導け。
- (4) 点 $P(x, y)$ を表す複素数 $z = x + yi$ は、等式

$$|z - 4i| + |z + 4i| = 10$$

 を満たす。このとき、Pは焦点が $(0, \pm \sqrt{\text{}})$ の楕円 $\frac{x^2}{\text{}} + y^2 = 1$ 上にある。

解説

(1) 焦点の座標は、 $(\pm\sqrt{25-9}, 0) = (\pm 4, 0)$

楕円上の点から焦点までの距離の和は、 $2 \cdot 5 = 10$

(2) だ円の方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) とおくと

焦点が $(\pm 3, 0)$ より、 $a^2 - b^2 = 3^2$

長軸の長さが10より、 $2a = 10$

よって、 $a = 5$, $b^2 = 16$

したがって、求めるだ円の方程式は

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(3) 楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) とおくと

$$2a = 4, \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

よって、求める方程式は

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(4) $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$ とすると,
 $P(x, y)$ は $PF + PF' = 10$ を満たす

P は $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$ を焦点とする楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < a < b$)

上にあって、長軸の長さが 10 より

$$2b = 10 \quad a = \sqrt{25 - 16} = 3$$

よって、楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

(3) 円と楕円

円と楕円の関係について調べる。

円 $C: x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍に縮小または
 拡大して得られる曲線 C' を考える。

C' 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり、
 この縮小または拡大によって P に移さ
 れる C 上の点を $Q(X, Y)$ とすると、

$$x = X, y = \frac{b}{a}Y$$

$$\therefore X = x, Y = \frac{a}{b}y$$

Q は C 上の点であるから、 $X^2 + Y^2 = a^2$ より

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

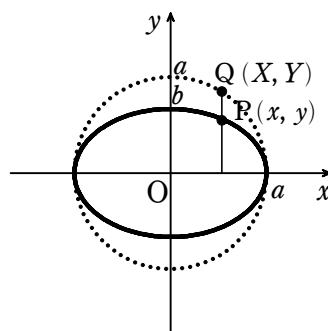
すなわち、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸をもとにして y 軸

方向に $\frac{b}{a}$ 倍縮小または拡大して得られる曲線である。

〔注〕 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = b^2$ を y 軸をもとにして x 軸方向に $\frac{a}{b}$

倍縮小または拡大して得られる曲線と考えてもよい。

〔補足〕 円は楕円の特別な場合と考えることもできる。



例3

円 $x^2 + y^2 = 16$ を y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍してできる楕円の方程式を求めよ。

(解説)

円上の点 (X, Y) を y 方向に $\frac{1}{2}$ 倍した点を (x, y) とすると

$$x = X, \quad y = \frac{1}{2}Y$$

$$X = x, \quad Y = 2y$$

(X, Y) は $x^2 + y^2 = 16$ 上の点より

$$X^2 + Y^2 = 16$$

$$x^2 + (2y)^2 = 16$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

例4

i は虚数単位とする。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の焦点は2点 $(-\sqrt{\text{□}}, 0), (\sqrt{\text{□}}, 0)$

である。また、この楕円で囲まれた図形の面積は $\text{□} \pi$ である。

(2) 複素数 z が $|2z - 1 - \sqrt{2}i| + |2z + 1 + \sqrt{2}i| \leq 4$ の範囲を動くとき、

複素数平面で点 z が描く図形の面積は $\text{□} \pi$ である。

(解説)

(1) 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ …… ① の焦点は

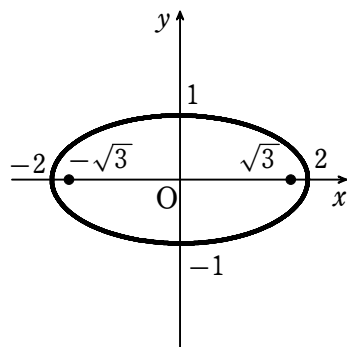
$$(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$$

楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ は円 $x^2 + y^2 = 4$ を

x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍縮小した

ものであるから、求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$$



$$(2) |2z - 1 - \sqrt{2}i| + |2z + 1 + \sqrt{2}i| \leq 4$$

$$2 \left| z - \frac{1 + \sqrt{2}i}{2} \right| + 2 \left| z + \frac{1 + \sqrt{2}i}{2} \right| \leq 4$$

$$\left| z - \frac{1 + \sqrt{2}i}{2} \right| + \left| z + \frac{1 + \sqrt{2}i}{2} \right| \leq 2$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{2}i}{2} \text{ とおくと}$$

$$|z - \alpha| + |z - (-\alpha)| \leq 2$$

$|z - \alpha| + |z - (-\alpha)| = 2$ は 2 点 α , $-\alpha$ からの距離の和が 2 に等しいから、
点 z の軌跡は 2 点 α , $-\alpha$ を焦点とし、長軸の長さが 2 の楕円である
この楕円の短軸の長さを x とすると

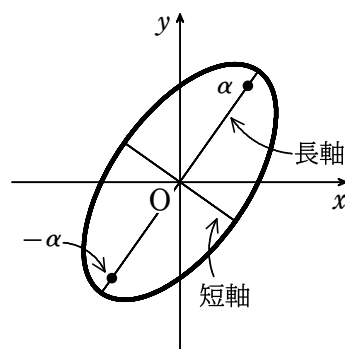
$$\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = |\alpha|$$

$$|\alpha| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より, } x = 1$$

よって、点 z の描く図形は、
長軸の長さが 2、短軸の長さが 1 の楕円の
内部および周上

その面積は、(1)より

$$\pm 2\pi$$



(4) 楕円の媒介変数表示

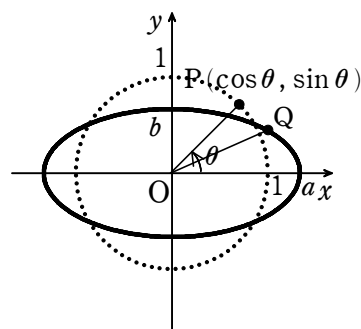
円 $x^2 + y^2 = 1$...①の媒介変数表示は、
三角関数を用いて

$$x = \cos \theta, y = \sin \theta$$

で与えられる。

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ...②の媒介変数表示}$$

を考える。



楕円②上の点 $Q(x, y)$ に対し、 $X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}$ とおくと $P(X, Y)$ は

円 $X^2 + Y^2 = 1$ 上にあるから、円①の媒介変数表示を用いて

$$X = \cos \theta, Y = \sin \theta$$

$$\frac{x}{a} = \cos \theta, \frac{y}{b} = \sin \theta$$

と表されます。よって、楕円②の媒介変数表示は次のようになります。

$$x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$$

☐ θ は x 軸正の向きと OP のなす角であり、 OQ とのなす角ではない。

例5

(1) 曲線 $x^2 + 2y^2 = 2$ ($y \geq 0$) 上を点 $P(x, y)$ が動くとき、 $x + y$ の最大値は ア であり、このときの点 P の x 座標は イ である。また、 $x + y$ の最小値は ウ である。

(2) 座標平面上の点 (x, y) が曲線 $4x^2 + 9y^2 - 24x = 0$ の上を動くとき、 $x^2 + y^2 - 6x$ の最小値は である。

(3) 点 $P(x, y)$ が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の上を動くとき、 $3x^2 - 16xy - 12y^2$ の値が最大になる点 P の座標を求めよ。

解説

(1) $x^2 + 2y^2 = 2$ ($y \geq 0$) から、 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ($y \geq 0$) より

$$x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とおける

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{2} \cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{3} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

(α は $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を満たす角)

$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大

$$\text{最大値 } \sqrt{3} \left(x = \frac{2}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$\theta + \alpha = \pi + \alpha$, すなわち、 $\theta = \pi$ のとき最小

$$\text{最小値 } -\sqrt{2}$$

別解

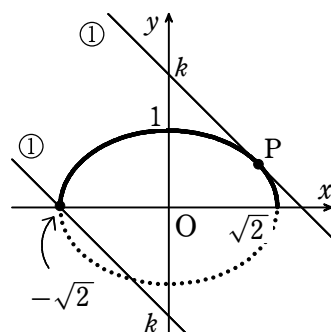
$x+y=k$ とおくと

$$y = -x + k \cdots \textcircled{1}$$

$x+y$ のとりうる値の範囲は、直線 ① が曲線 $x^2+2y^2=2$ ($y \geq 0$) と共有点をもつときの k の値の範囲に等しい

曲線 $x^2+2y^2=2$ ($y \geq 0$)

は楕円 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ の上半分を表し、



① は傾きが -1 , y 切片が k の直線を表す

直線 ① が曲線 $x^2+2y^2=2$ ($y \geq 0$) と第 1 象限の点で接するとき、 k は最大 ($k > 0$)

このとき、

$$x^2 + 2(-x + k)^2 = 2$$

$$3x^2 - 4kx + 2k^2 - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

②の判別式を D とすると、 $D=0$ より

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 3 \cdot (2k^2 - 2) = -2(k^2 - 3) = 0 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

よって、 $x+y$ の最大値は $\sqrt{3}$

このとき、②の重解は $x = \frac{2k}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ より、

点 P の x 座標は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

また、直線 ① が点 $(-\sqrt{2}, 0)$ を通るとき、 k は最小
このとき、

$$k = -\sqrt{2} + 0 = -\sqrt{2}$$

よって、 $x+y$ の最小値は $-\sqrt{2}$

(2) $4x^2+9y^2-24x=0$ より

$$4(x-3)^2 + 9y^2 = 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \cdots \textcircled{1}$$

よって、

$$x = 3\cos\theta + 3, \quad y = 2\sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける

$P = x^2 + y^2 - 6x$ とすると

$$\begin{aligned} P &= (3\cos\theta + 3)^2 + (2\sin\theta)^2 - 6(3\cos\theta + 3) \\ &= 9\cos^2\theta + 18\cos\theta + 9 + 4\sin^2\theta - 18\cos\theta - 18 \\ &= 9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta - 9 \\ &= 9(1 - \sin^2\theta) + 4\sin^2\theta - 9 = -5\sin^2\theta \end{aligned}$$

$0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ であるから、 P は $\sin^2\theta = 1$ のとき最小値 -5 をとる

$\sin^2\theta = 1$ のとき、 $\sin\theta = \pm 1$ より、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

このとき、 $(x, y) = (3, \pm 2)$

別解

点 (x, y) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に

3 だけ平行移動した曲線上にある

$P = x^2 + y^2 - 6x$ とすると

$$P = (x-3)^2 + y^2 - 9$$

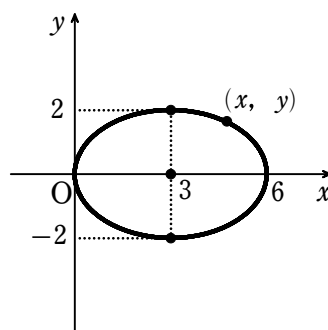
ここで、 $(x-3)^2 + y^2$ は、

点 (x, y) と点 $(3, 0)$ の距離の 2 乗を表し、

$(x, y) = (3, \pm 2)$ のとき最小となる

このとき、 P も最小となり、その最小値は

$$0^2 + 2^2 - 9 = -5$$



(3) 点 $P(x, y)$ は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動くから、

$$x = 2\cos\theta, \quad y = \sin\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける

このとき

$$\begin{aligned} 3x^2 - 16xy - 12y^2 &= 3 \cdot 4\cos^2\theta - 16 \cdot 2\cos\theta \cdot \sin\theta - 12\sin^2\theta \\ &= 12(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 16 \cdot 2\sin\theta \cos\theta \\ &= 12\cos 2\theta - 16\sin 2\theta \\ &= -4(4\sin 2\theta - 3\cos 2\theta) \\ &= -4 \cdot 5\sin(2\theta - \alpha) \end{aligned}$$

ただし、 α は $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を満たす角

$2\theta - \alpha = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$, すなわち $\theta = \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}, \frac{7}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$ のとき最大

ここで、 $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ より

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\right)} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$\theta = \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} x &= 2\cos \theta = 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{3}{4}\pi \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{3}{4}\pi \sin \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right\} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3}{4}\pi \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{4}\pi \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$\theta = \frac{7}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left\{\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + \pi\right\} = -2\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= -\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \end{aligned}$$

$$y = \sin\left(\frac{7}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left\{\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + \pi\right\} = -\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

求める点 P の座標は

$$\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

例6

実数 t を媒介変数として、 $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{4t}{1+t^2}$ で表される点 (x, y) が満たす曲線の方程式を x, y で表せ。ただし、 $(x, y) \neq (-1, 0)$ とする。

解説

$t = \tan \frac{\theta}{2}$ ($\theta \neq \pi + 2n\pi$ (n は整数)) とおくと、

$$x = \cos \theta, y = 2\sin \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

別解

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ より,}$$

$$x(1+t^2) = 1-t^2$$

$$(1+x)t^2 = 1-x \dots \textcircled{1}$$

$x = -1$ とすると, $\textcircled{1}$ は $0 \cdot t^2 = 2$ となり, 成り立たないから $x \neq -1$ によって, $\textcircled{1}$ より

$$t^2 = \frac{1-x}{1+x} \dots \textcircled{2}$$

$$y = \frac{4t}{1+t^2} \text{ より}$$

$$y(1+t^2) = 4t$$

$\textcircled{2}$ を代入すると

$$y \left(1 + \frac{1-x}{1+x} \right) = 4t$$

$$t = \frac{y}{2(1+x)} \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$\left\{ \frac{y}{2(1+x)} \right\}^2 = \frac{1-x}{1+x}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (\text{ただし } (x, y) \neq (-1, 0))$$

例7

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に内接する正方形の1辺の長さは $\sqrt{\quad}$ である。

また, この楕円に内接する長方形の面積の最大値は $1 \sqrt{\quad}$ である。

解説

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に内接する長方形の4辺は,

x 軸または y 軸と平行であるから,

長方形の第1象限にある頂点の座標は、

$$(3\cos\theta, 2\sin\theta)$$

とおける

この長方形が正方形であるとき

$$3\cos\theta = 2\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{3}{2}$$

$$\cos\theta > 0 \text{ より, } \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

よって、正方形の1辺の長さは

$$2 \cdot 3\cos\theta = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

また、長方形の面積を S とすると

$$S = 6\cos\theta \cdot 4\sin\theta = 12\sin 2\theta$$

$0 < 2\theta < \pi$ であるから、 S は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大

最大値 $\uparrow 12$

別解

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に内接する長方形の4辺は、

x 軸または y 軸と平行である

正方形の1辺の長さを l とすると、

第1象限にある正方形の頂点の座標は

$$\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$$

これが楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上にあるから

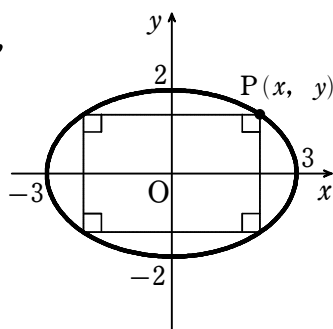
$$\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 1 \quad \therefore l^2 = \frac{12^2}{13}$$

$$l > 0 \text{ より, } l = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

また、長方形の第1象限にある頂点を $P(x, y)$ ($x > 0, y > 0$) とすると

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき、長方形の面積を S とすると



$$S=4xy \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $\frac{x^2}{9} > 0$, $\frac{y^2}{4} > 0$ であるから、相加相乗平均より

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{9} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{3}xy$$

これと①, ②より

$$1 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{4} \quad \therefore S \leq 12$$

等号成立は $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2} \ (x > 0, y > 0)$,

すなわち $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y = \sqrt{2}$ のとき

よって、面積 S の最大値は $\uparrow 12$

例8

だ円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上を動く点を P , 直線 $4x + 3y = 12$ 上を動く点を Q とする.

(1) 距離 PQ の最小値を求めよ.

(2) 上の問題について種々の解答方法が考えられるが, (1) の解答方法とは別の解答方法を 1 つ挙げ, その解答方法の考え方(解答方針のアウトライン)をかけ. ただし, x を y に変えて解答できる解答方法は除く.

解説

(1) P は $(\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta) \ (0 \leq \theta < 2\pi)$ とおける

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{|4\sqrt{2} \cos \theta + 3\sqrt{3} \sin \theta - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|\sqrt{59} \sin(\theta + \alpha) - 12|}{5} \end{aligned}$$

$-\sqrt{59} \leq \sqrt{59} \sin(\theta + \alpha) \leq \sqrt{59}$ より,

PQ の最小値は $\frac{12 - \sqrt{59}}{5}$

(2) $3x^2 + 2y^2 = 6 \cdots \textcircled{1}$

$4x + 3y = 12 \cdots \textcircled{2}$

だ円①上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線が②と平行であるとき,

②と P の距離は最小となることを利用する

(5) 双曲線

平面上で、異なる 2 定点 F, F' からの距離の差が 0 でない一定値である点 P の軌跡を双曲線といい、この 2 点 F, F' を双曲線の焦点という。ただし、焦点 F, F' からの距離の差は線分 FF' の長さより小さいものとする。

2 定点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ を焦点とし、この 2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の C の方程式を求める。ただし、 $c > a > 0$ とする。

双曲線 C 上の点を $P(x, y)$ とすると、

$$PF - PF' = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

楕円の場合と同様に

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$c > a$ であるから、 $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ とおくと、
 $b > 0$ であり

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \textcircled{1}$$

これを双曲線の方程式の標準形という。

また、このとき、 $\sqrt{c^2 - a^2} = b$ とおいたから、 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ より、
2 つの焦点 F, F' の座標は、

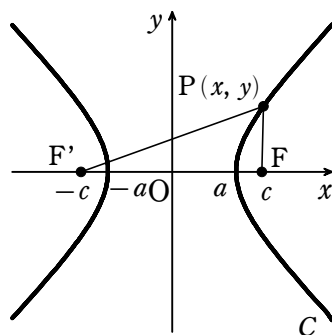
$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

2 点 F, F' を焦点とする双曲線において、直線 FF' と双曲線の 2 つの交点を頂点、線分 FF' の中点を双曲線の中心という。

双曲線①では、頂点は 2 点 $(a, 0), (-a, 0)$ 、中心は原点 O であり、曲線は x 軸、 y 軸、原点に関して対称である。

2 直線 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$ が、双曲線①の漸近線であることを示す。

双曲線の中心が O であることから、漸近線は $y = mx$ とおける。

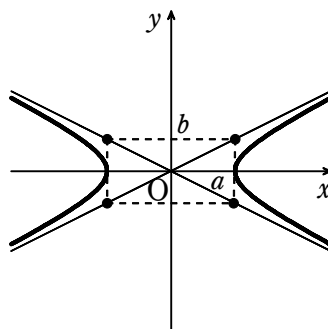


また, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は, $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ の $x > 0$ の漸近線は,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(mx - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = 0$ となるとき,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m^2 x^2 - \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)}{mx + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(m^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) x^2 + b^2}{mx + \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$



であるから

$$m^2 - \frac{b^2}{a^2} = 0$$

$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} > 0$ であるから, $m > 0$ より, $m = \frac{b}{a}$

同様に, $x < 0$ の場合,

$y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ の $x > 0, x < 0$ の場合の漸近線を調べると,

$y = \frac{b}{a} x, y = -\frac{b}{a} x$ であり, 示すことができます。

双曲線についてまとめると, 次のようになります。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の性質

1. 中心は原点, 頂点は 2 点 $(a, 0), (-a, 0)$
2. 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$
3. 双曲線は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。
4. 漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a} x, y = -\frac{b}{a} x$
5. 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \dots \textcircled{1} \text{ は } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \dots \textcircled{2}$$

の x と y を入れ替えたものであるから、
 $\textcircled{1}$ の表す曲線の頂点，焦点，漸近線を
 考えて，それぞれ x, y を入れ替えて，
 曲線 $\textcircled{2}$ は

頂点が 2 点 $(0, b), (0, -b)$

焦点が $F(0, \sqrt{a^2 + b^2}),$

$F'(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$

の双曲線で，漸近線は

$$2 \text{ 直線 } y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

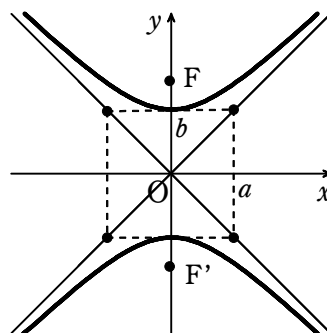
である。

また，双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2b$ である。

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

すなわち $x^2 - y^2 = a^2$ の漸近線は，
 2 直線 $y = x, y = -x$ で，これらは
 互いに直交している。

このように，直交する漸近線をもつ双曲線を直角双曲線という。



例9

(1) 双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ について，焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。

(2) $y = 2x, y = -2x$ を漸近線とし，点 $(3, 0)$ を通る双曲線について，この双曲線の方程式および焦点の座標を求めよ。

(3) 方程式 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ は 2 点 $A(a, 0), B(-a, 0)$ からの距離の差が一定値 b であるような点の軌跡を表している．正の数 a, b の和 $a + b$ の値はいくらか。

解説

(1) 焦点の座標は、 $(0, \pm\sqrt{9+16})=(0, \pm 5)$

漸近線の方程式は、 $y=\frac{4}{3}x, y=-\frac{4}{3}x$

(2) 双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) とおける

点 $(3, 0)$ を通るから、 $\frac{3^2}{a^2}=1 \quad \therefore a=3$

漸近線の傾きが ± 2 より、 $\frac{b}{a}=2 \quad \therefore b=2a=6$

よって、求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$$

焦点の座標は、 $(3\sqrt{5}, 0), (-3\sqrt{5}, 0)$

(3) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ の焦点は $(2, 0), (-2, 0)$

$y=0$ のとき $x=\pm 1$ より

$$b=|(1+a)-(a-1)|=2$$

よって、 $a+b=2+2=4$

(6) 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $x^2-y^2=1 \cdots \textcircled{1}$ について
三角関数を用いた媒介変数表示を
考える。三角関数について

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

すなわち、 $\frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1$

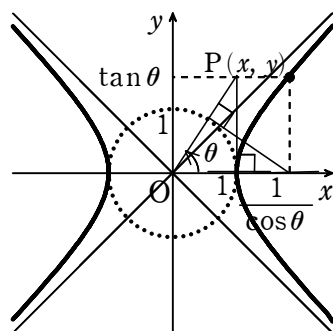
が成り立つから

$$x=\frac{1}{\cos\theta}, y=\tan\theta \cdots \textcircled{2}$$

とおくと、点 $P(x, y)$ は双曲線 $\textcircled{1}$ 上にある。

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから、 $\frac{1}{\cos\theta} \leq -1, 1 \leq \frac{1}{\cos\theta}$,

$\tan\theta$ は任意の実数値をとるから、



角 θ が動くと、②で与えられる点 $P(x, y)$ は双曲線①上の点すべてを動く。

よって、双曲線①の媒介変数表示は、②で与えられる。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{3}$ の媒介変数表示を考える。

双曲線③上の点 $Q(x, y)$ に対し、 $X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}$ とおくと、

$P(X, Y)$ は双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ 上にあるから、双曲線①の媒介変数表示②を用いて

$$X = \frac{1}{\cos \theta}, Y = \tan \theta$$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \theta}, \frac{y}{b} = \tan \theta$$

と表される。よって、双曲線③の媒介変数表示は次のようになる。

$$x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$$

例10

点 P が曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ の上を動くとき、点 P と点 $(5, 0)$ の距離の最小値を求めよ。

解説

$x^2 - 4y^2 = 4$ から、 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ より、

$P\left(\frac{2}{\cos \theta}, \tan \theta\right) (0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ とおける

$A(5, 0)$ とおくと、

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{\left(\frac{2}{\cos \theta} - 5\right)^2 + \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{\frac{4}{\cos^2 \theta} - \frac{20}{\cos \theta} + 25 + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \end{aligned}$$

$t = \frac{1}{\cos \theta}$ とおくと、 t は実数全体を動き、

$$AP = \sqrt{5t^2 - 20t + 24} = \sqrt{5(t-2)^2 + 4}$$

$t=2$ のとき最小 最小値 2

別解

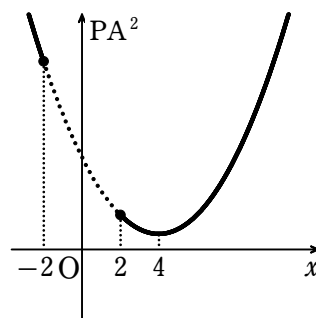
$P(x, y)$ とすると, P は $x^2 - 4y^2 = 4$ を満たす

$$y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \geq 0 \text{ より}$$

$$x^2 \geq 4 \quad \therefore x \leq -2, 2 \leq x$$

点 $(5, 0)$ を A とすると

$$\begin{aligned} PA^2 &= (x-5)^2 + y^2 = (x-5)^2 + \frac{x^2}{4} - 1 \\ &= \frac{5}{4}x^2 - 10x + 24 = \frac{5}{4}(x-4)^2 + 4 \end{aligned}$$



よって, PA^2 は $x=4$ で最小値 4 をとる

PA^2 が最小となるときの PA も最小となるから

点 P と点 $(5, 0)$ の距離の最小値は 2

例11

曲線 C が媒介変数 t を用いて $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ と表されているとする.

- (1) 曲線 C を表す x と y の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 C 上の点 $\left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right)$ における接線の傾きと y 切片を, それぞれ t を用いて表せ. ただし, $t^2 \neq 1$ とする.

解説

$$(1) \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 4 \text{ より}$$

$$x^2 = y^2 + 4$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 4$$

$$(2) \text{ 点 } \left(t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\right) \text{ における接線の方程式は}$$

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)x - \left(t - \frac{1}{t}\right)y = 4$$

$$t^2 \neq 1 \text{ より, } t - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - 1}{t} \neq 0$$

よって

$$\text{傾きは } \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad y \text{ 切片は } \frac{-4}{t - \frac{1}{t}} = -\frac{4t}{t^2 - 1}$$

(7) 2次曲線と領域

円，楕円，双曲線，放物線は，座標平面で考えると x, y の2次方程式

$$x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0, a \neq b) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$$

$$y^2 = 4px (p \neq 0)$$

などで表される。円，楕円，双曲線，放物線をまとめて2次曲線という。

不等式 $y^2 < 4px, y^2 > 4px$ の表す領域について考える。

$y^2 < 4px (p > 0)$ の表す領域について，

$y = y_1$ のとき， $y_1^2 < 4px$ ， すなわち，

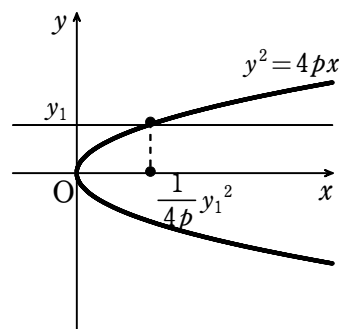
$x > \frac{1}{4p} y_1^2$ であるから，

y_1 を動かして，図のようになる。

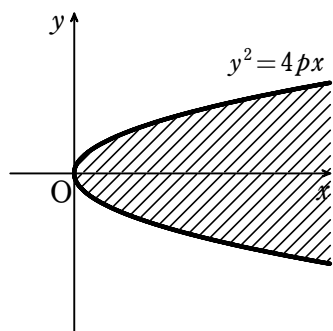
$y^2 > 4px$ の表す領域についても同様

に考えれば，境界を除いた反対側の部分になることが分かる。

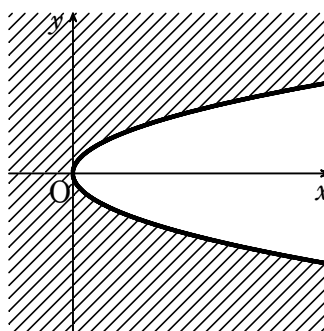
まとめると，次のようになる。



1. $y^2 < 4px (p > 0)$



2. $y^2 > 4px (p > 0)$



不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ の

表す領域は,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ について,

$$y^2 < \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$a^2 - x^2 \geq 0$ である, $-a < x < a$ において

$$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} < y < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

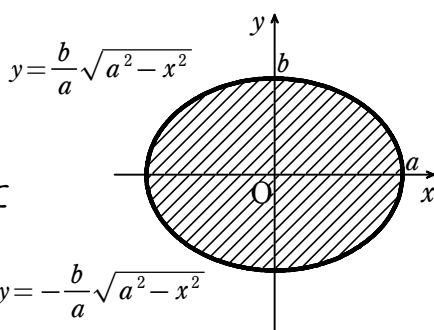
$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ は楕円の $y \leq 0$ の部分,

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ は楕円の $y \geq 0$ の部分を

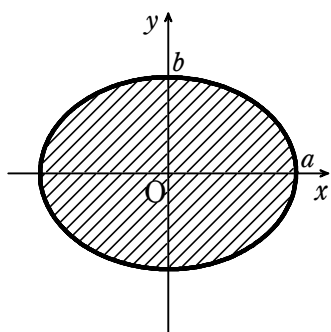
表すから, 不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ の表す領域は, 楕円の内部になる。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ の表す領域についても同様に考えれば, 楕円の外部になる
ことが分かる。

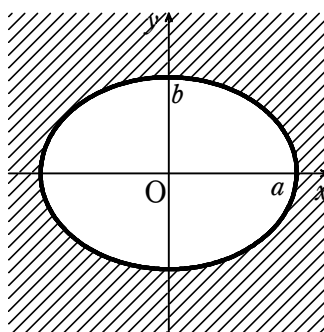
まとめると, 次のようになる。



1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$



2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$



☞ 楕円は円を x 軸, y 軸方向に拡大縮小したものであり, 元の円の領域を考えてから拡大縮小すればよいので, 円の領域と同様に考えることができる。

不等式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$ の

表す領域は、

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$ について、

$$y^2 > \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$x^2 - a^2 < 0$ である $-a < x < a$ において、
 $y^2 \geq 0$ であるから、不等式は常に成立する
 $x^2 - a^2 \geq 0$ である $x \leq -a, x \geq a$ において、

$$y < -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, y > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ は双曲線の $y \leq 0$ の部分、

$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ は双曲線の $y \geq 0$ の部分を

表すから、不等式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ の表す領域は、

右図のようになる。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ の表す領域についても同様に

考えれば、右図の境界を除いた反対側になることが分かる。

[注]ただ、このようなことをいちいち考えるのも面倒なので、分けられた部分の中で代表な点の座標を代入し、不等号が成り立つかどうかでその部分が塗られるか塗られないかを判断してもよい。

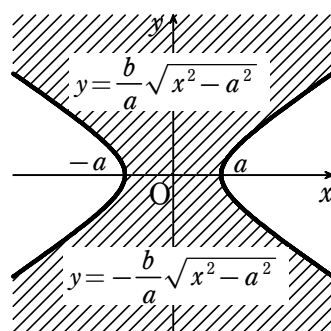
例えば、上の不等式について、

$(0, 0)$ を代入すると、 $0 < 1$ で、不等号が成り立つ

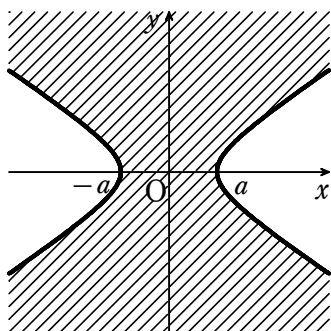
$(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ では、 $\frac{a^2 + b^2}{a^2} > 1$ で、不等号は成り立た

ないので、図のような領域になると考えてもよい。

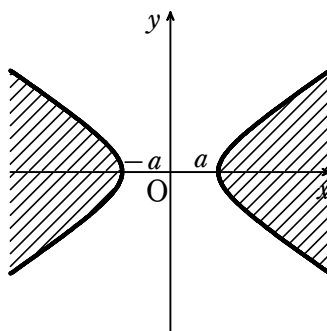
まとめると、次のようになる。



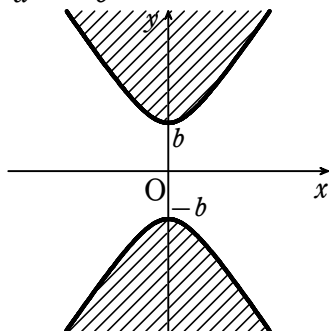
$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$



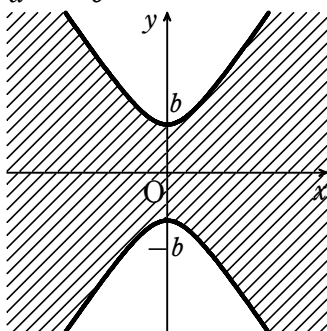
$$2. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$$



$$3. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < -1$$



$$4. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > -1$$



例12

不等式 $(x^2 - 1)^2 < 4y^4$ を満たす領域を図示せよ。

解法解説

$$(x^2 - 1)^2 < 4y^4 \text{ より}$$

$$(x^2 - 1)^2 - (2y^2)^2 < 0$$

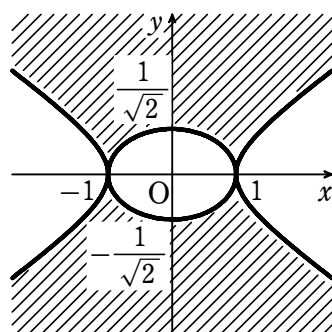
$$(x^2 + 2y^2 - 1)(x^2 - 2y^2 - 1) < 0$$

$$x^2 + 2y^2 \geq x^2 - 2y^2 \text{ より}$$

$$x^2 - 2y^2 - 1 < 0, x^2 + 2y^2 - 1 > 0$$

$$x^2 - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} < 1 \dots \textcircled{1},$$

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} > 1 \dots \textcircled{2}$$



① は頂点が $(-1, 0), (1, 0)$, 漸近線が $x = \pm\sqrt{2}y$ である双曲線で分けられる 3 つの領域のうち, 原点を含む領域 (双曲線上の点を含まない)

② は長軸の両端が $(-1, 0), (1, 0)$, 短軸の両端が $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

である楕円の外部であるから

求める領域は図の斜線部分

ただし, 境界線は除く

(8) 2次曲線の平行移動

楕円, 双曲線, 放物線などは, いずれも x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ の形で表される。

一般に, x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ が与えられたとき, この方程式が曲線を表すならば, この曲線を方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線, または曲線 $F(x, y) = 0$ という。

また, 方程式 $F(x, y) = 0$ をこの曲線の方程式という。

方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線 C を, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線 C' の方程式を求める。

C' 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり, この平行移動によって P に移される C 上の点を $Q(X, Y)$ とすると

$$x = X + p, y = Y + q$$

すなわち, $X = x - p, Y = y - q$

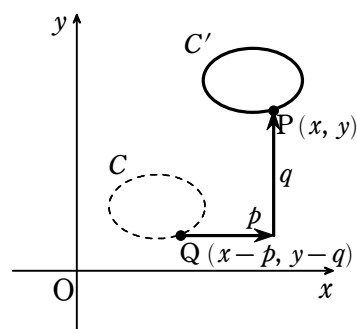
点 Q は C 上にあるから

$$F(X, Y) = 0$$

この式の X に $x - p$, Y に $y - q$ を代入すると

$$F(x - p, y - q) = 0$$

これが, 曲線 C' の方程式である。



曲線 $F(x, y) = 0$ の平行移動

曲線 $F(x, y) = 0$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$F(x - p, y - q) = 0$$

例13

(1) 点 $(1, 1)$ と直線 $y = -2$ からの距離が等しい点の軌跡は放物線であり、その方程式は $y = ax^2 + bx - \frac{1}{3}$ である。このとき、 $a = \text{ア}$, $b = \text{イ}$ である。

(2) 2点 $(3, 0)$, $(-1, 0)$ からの距離の和が 12 である点の軌跡は楕円で、その方程式は $\frac{(x-r)^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$ である。このとき、 $p = \text{ウ}$, $q = \text{エ}$, $r = \text{オ}$ である。

解説

(1) $P(x, y)$ とする、

P から直線 $y = -2$ に下ろした垂線の足を H ,

$A(1, 1)$ とすると、

$AP = PH$ より

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+2)^2$$

$$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \quad \therefore a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{1}{3}$$

別解

題意より、放物線の頂点は $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

これが原点に移るように平行移動すると、

焦点は $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 準線は $y = -\frac{3}{2}$ に移るから、

求める放物線は $x^2 = 6y$ を

x 軸方向に 1, y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ 平行移動したものとして求める

(2) 中心は、2点 $(3, 0)$, $(-1, 0)$ の中点より $(1, 0)$

求める楕円の方程式は $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ おくと

2焦点からの距離の和が 12 より、 $a = 6$

また、 $b = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32}$

よって、求める楕円は

$$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$$

例14

xy 座標平面において、2 直線 $y=2(x+2)$, $y=-2(x+2)$ を漸近線とし、
 原点を通る双曲線の方程式は $\frac{x^2}{\boxed{}} - \frac{y^2}{\boxed{}} = 1$ である。また、この双曲線の1つ
 の焦点を $F(c, 0) (c > 0)$ とすると、 $c = \sqrt{\boxed{}}$ である。

解説

漸近線が $y = \pm 2x$ で、頂点が x 軸上にある双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(2a)^2} = 1 \quad (a > 0)$$

と表される

これが点 $(2, 0)$ を通るとき、 $\frac{4}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 4$

このとき

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

この双曲線の焦点の座標は、 $(-2\sqrt{5}, 0), (2\sqrt{5}, 0)$

求める双曲線はこれを x 軸方向に -2 だけ平行移動したものより

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

また、 $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

(9) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ の表す図形

例15

(1) 2次曲線 $x = \frac{1}{2}y^2 + y \cdots \cdots \textcircled{1}$ を頂点を表す形に変形すると, $x = \overset{\text{ア}}{\square}$ となる. 更に $Y^2 = 4pX$ の形に変形すると, $Y = \overset{\text{イ}}{\square}$, $X = \overset{\text{ウ}}{\square}$, $p = \overset{\text{エ}}{\square}$ である. したがって, $\textcircled{1}$ は焦点が $\overset{\text{オ}}{\square}$, 準線が $x = \overset{\text{カ}}{\square}$ の放物線であることがわかる.

(2) 方程式 $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ の表す図形は楕円であることを示し, その焦点と中心の座標, および長軸と短軸の長さを求めよ. また, その図形の概形をかけ.

(3) 双曲線 $4x^2 - y^2 - 16x + 2y - 1 = 0$ の漸近線の方程式は $y = \overset{\text{ア}}{\square}x - \overset{\text{イ}}{\square}$ と $y = -\overset{\text{ウ}}{\square}x + \overset{\text{エ}}{\square}$ である.

解説

$$(1) x = \frac{1}{2}y^2 + y = \overset{\text{ア}}{\frac{1}{2}}(y+1)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(y+1)^2 = 2x + 1$$

$$(y+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

よって

$$Y = \overset{\text{イ}}{y+1}, X = \overset{\text{ウ}}{x + \frac{1}{2}}, p = \overset{\text{エ}}{\frac{1}{2}}$$

$\textcircled{1}$ は放物線 $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}x \cdots \textcircled{2}$

を x 軸方向に $-\frac{1}{2}$, y 軸方向に -1 だけ平行移動もの

$\textcircled{2}$ の焦点は $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$, 準線は $x = -\frac{1}{2}$ であるから,

$\textcircled{1}$ の焦点は $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 0 - 1 \right)$, すなわち $\overset{\text{オ}}{(0, -1)}$,

準線は $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, すなわち $x = \overset{\text{カ}}{-1}$

$$(2) x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \dots \textcircled{1}$$

①は楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \dots$ ②を x 軸方向に 2,

y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである

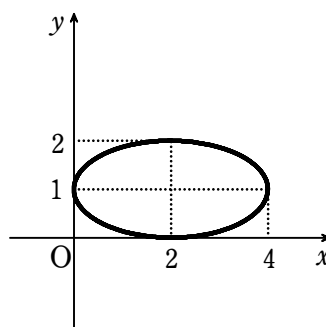
②の焦点の座標は $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 2 = 4$, 短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$

よって, ①の焦点の座標は $(2 + \sqrt{3}, 1), (2 - \sqrt{3}, 1)$

中心の座標は $(2, 1)$, 長軸の長さは 4, 短軸の長さは 2 で,

概形は右図



$$(3) 4x^2 - y^2 - 16x + 2y - 1 = 0$$

$$4(x-2)^2 - (y-1)^2 = 16$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

これは, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に 1 だけ平行移動し

たものであるから, 求める漸近線は

$$y-1 = 2(x-2), y-1 = -2(x-2)$$

$$\therefore y = 2x - 3, y = -2x + 5$$

(10) 2次曲線の回転

方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線 C を, 原点を中心に θ だけ回転して得られる曲線 C' の方程式を求める。

C' 上に任意の点 $P(x, y)$ をとり, この回転によって P に移される C 上の点を $Q(X, Y)$ とすると, これらの点は複素数平面上では, $x + yi, X + Yi$ であり, P は Q を原点周りに θ だけ回転したものであるから

$$x + yi = (\cos \theta + i \sin \theta)(X + Yi)$$

$$X + Yi = (\cos \theta - i \sin \theta)(x + yi) \text{ (両辺に } \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \text{ をかけて)}$$

$$X + Yi = \{(\cos \theta)x + (\sin \theta)y\} + i\{(-\sin \theta)x + (\cos \theta)y\}$$

より,

$$X = (\cos \theta)x + (\sin \theta)y$$

$$Y = (-\sin \theta)x + (\cos \theta)y$$

点 Q は C 上にあるから

$$F(X, Y) = 0$$

この式の X, Y にこれらを代入すると

これが、曲線 C' の方程式である。

例16

楕円 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ を原点の周りに 45° 回転した曲線の方程式は

$$\text{ア} \boxed{} (x^2 + y^2) + \text{イ} \boxed{} xy = 1 \text{ となる.}$$

(解説)

点 (X, Y) を原点の周りに 45° だけ回転した点を (x, y) とすると、複素数平面上ではそれぞれ点は、 $X + Yi, x + yi$ となり

$$x + yi = (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)(X + Yi)$$

$$X + Yi = (\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ)(x + yi)$$

$$= \frac{1-i}{\sqrt{2}}(x + yi) = \frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{-x+y}{\sqrt{2}}i$$

x, y, X, Y は実数より

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

(X, Y) は $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 上の点であるから、 $X^2 + \frac{Y^2}{5} = 1$ より

$$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(-x+y)^2}{10} = 1$$

$$\therefore \frac{3}{5}(x^2 + y^2) + \frac{4}{5}xy = 1$$

(11) $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ の表す図形

例17

曲線 $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1$ を原点を中心に左回り (反時計回り) に 30°

回転すると、 $\text{ア} \boxed{} x^2 + \text{イ} \boxed{} xy + \text{ウ} \boxed{} y^2 = 1$ に移り、もとの曲

線は $\text{エ} \boxed{}$ であることがわかる。

(解説)

点 (X, Y) を原点の周りに 30° だけ回転した点を (x, y) とすると、
複素数平面上ではそれぞれ点は、 $X + Yi, x + yi$ となり

$$x + yi = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)(X + Yi)$$

$$X + Yi = (\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)(x + yi)$$

$$= \frac{\sqrt{3} - i}{2}(x + yi) = \frac{\sqrt{3}x + y}{2} + \frac{-x + \sqrt{3}y}{2}i$$

x, y, X, Y は実数より

$$X = \frac{\sqrt{3}x + y}{2}, y = \frac{-x + \sqrt{3}y}{2}$$

(X, Y) は $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1$ 上の点であるから、

$3X^2 + 2\sqrt{3}XY + 5Y^2 = 1$ より

$$3\left(\frac{\sqrt{3}x + y}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x + y}{2} \cdot \frac{-x + \sqrt{3}y}{2} + 5\left(\frac{-x + \sqrt{3}y}{2}\right)^2 = 1$$

$$3(3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2) + 2\sqrt{3}(-\sqrt{3}x^2 + 2xy + \sqrt{3}y^2) + 5(x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2) = 4$$

$$\therefore 2x^2 + 6y^2 = 1$$

これは楕円を表すので、もとの曲線も楕円であることが分かる

補1

連立不等式 $x^2 + \frac{y^2}{3} \leq 1$, $\frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1$ を満足する部分の面積を求めよ.

(解説)

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \cdots \textcircled{2} \text{ とする}$$

楕円 ①, ② はそれぞれ x 軸, y 軸, 原点に関して対称

$$\textcircled{2} \text{ より, } y^2 = 1 - \frac{x^2}{3} \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{これを} \textcircled{1} \text{ に代入して, } x^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) = 1 \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (複号任意)}$$

よって, 第1象限において,

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ の交点は } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

右図の斜線部分の面積を S とすると,

求める面積は $8S$ である

右図の斜線部は右下図の斜線部を

y 軸方向に $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものであるから

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi$$

よって, 求める面積は

$$8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

