

2.4 三角関数の導関数

(1) $\frac{\sin x}{x}$ の極限

三角関数の極限に関する重要な公式について考える。
ただし、角の単位は弧度法によるものとする。

$\frac{\sin x}{x}$ の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$x \rightarrow 0$ であるから、 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ で考えればよい。

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

点 O を中心とする半径 1 の円において、
中心角 x の扇形 OAB を考える。

点 B から OA に下ろした垂線を BH、
点 A における円 O に接線が OB の延長
と交わる点を T とすると、AT は OA に
垂直で、面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 OAB} < \triangle OAT$$

BH = $\sin x$, AT = $\tan x$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

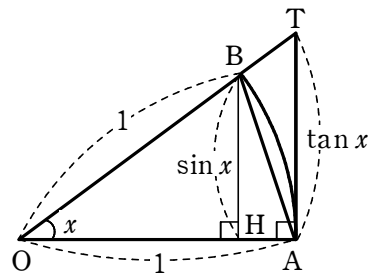
$$\therefore \sin x < x < \tan x$$

辺々 $\sin x (> 0)$ で割ると

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \therefore 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき

$x = -\theta$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

(i), (ii)より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

次も公式として覚えておくとよい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

例1

(1) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \tan 2x$$

(2) 角の大きさの単位が度であるとき, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a^\circ}{a} = \boxed{}$ である。

(3) 極限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \sin 3\theta}{\tan 2\theta}$ を求めよ。

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ を求めよ。

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{x}$ を求めよ。

角平説

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \tan 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = 2$$

$$(2) \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a^\circ}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} a}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{180} a}{\frac{\pi}{180} a} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}$$

$$(3) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \sin 3\theta}{\tan 2\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \theta}{\theta} - \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \cdot 3}{\frac{\tan 2\theta}{2\theta} \cdot 2} = \frac{1 - 1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = -1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)}{\sin \frac{x}{\pi}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$x \rightarrow 0$ のとき, $\frac{x}{\pi} \rightarrow 0, \sin \frac{x}{\pi} \rightarrow 0$ より

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

例2

(1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin x}$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n}$ を求めよ.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ の極限を求めよ.

解説

(1) $x - \pi = t$ とおくと,

$x \rightarrow \pi$ のとき, $t \rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\sin t} = -1$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$(3) \frac{1}{x} = t \text{ とおくと,}$$

$x \rightarrow \infty$ のとき, $t \rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

例3

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax + b}{\cos x} = \frac{2}{3} \text{ のとき, 定数 } a, b \text{ の値を求めよ.}$$

$$(2) p, q \text{ を実数とする. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p + q \cos x}{x^2} = 1 \text{ のとき, } p, q \text{ の値を求めよ.}$$

解説説

(1) 分母 $\rightarrow 0$ であるから分子 $\rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax + b) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}a + b = 0 \quad \therefore b = -\frac{\pi}{2}a$$

このとき

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a \left(x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos x}$$

$$t = x - \frac{\pi}{2} \text{ とおくと, } t \rightarrow 0 \text{ より}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{\cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{-\sin t} = -a = \frac{2}{3} \quad \therefore a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{\pi}{3}$$

逆に, このとき, 与式は成り立つ

(2) 分母 $\rightarrow 0$ であるから, 分子 $\rightarrow 0$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} (p + q \cos x) = 0$$

$$p + q = 0 \quad \therefore q = -p$$

このとき

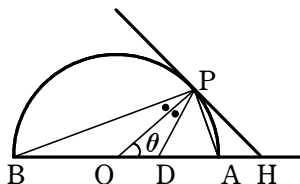
$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{p}{2} = 1 \quad \therefore p = 2, q = -2$$

(2) 三角関数の極限の応用

図形に関する極限について考える。

例4

図のように、点 O を中心とし、線分 AB を直径とする半径 1 の半円において、円周上に点 P をとり、 $\angle POA = \theta$ とし、点 P における接線が線分 OA の延長と交わる点を H とする。



ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

さらに、線分 OA 上に $\angle OPB = \angle OPD$ となるように点 D をとる。

(1) $AP = \overset{\text{ア}}{\boxed{}} \sin \frac{\theta}{\underset{\text{イ}}{\boxed{}}}$ である。

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AP}{\theta} = \overset{\text{ウ}}{\boxed{}}$ である。

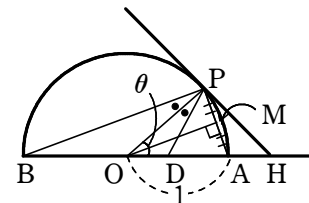
(3) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{\theta^2} = \frac{\overset{\text{エ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{オ}}{\boxed{}}}$ である。

(4) $\lim_{\theta \rightarrow +0} OD = \frac{\overset{\text{カ}}{\boxed{}}}{\underset{\text{キ}}{\boxed{}}}$ である。

解説

(1) $AP = 2AM = 2 \cdot OA \sin \angle AOM = \overset{\text{ア}}{2} \sin \frac{\theta}{\underset{\text{イ}}{2}}$

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AP}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \overset{\text{ウ}}{1}$



(3) $\angle OPH = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $OP = OH \cos \theta$ より

$$OH = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$AH = OH - OA = \frac{1}{\cos \theta} - 1 = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{AH}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}} \frac{1}{2}$$

(4) $\triangle OBP$ は $OB=OP$ の二等辺三角形より

$$\angle OPB = \angle OBP = \frac{1}{2} \angle POA = \frac{\theta}{2}$$

$$\angle OPB = \angle OPD \text{ より, } \angle OPD = \frac{\theta}{2}$$

$$\angle ODP = \pi - \angle POD - \angle OPD = \pi - \frac{3}{2}\theta$$

$\triangle OPD$ において, 正弦定理より

$$\frac{OD}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{OP}{\sin \left(\pi - \frac{3}{2}\theta \right)} \quad \therefore OD = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{3}{2}\theta}$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} OD = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\frac{3}{2}\theta}{\sin \frac{3}{2}\theta} \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} \frac{1}{3}$$

例5

n を 3 以上の整数とすると, 半径 1 の円に内接する正 n 角形の 1 辺の長さ d を角度 $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ を用いて表すと, $d = \text{ア}$ となる。この正 n 角形の面積 S を, θ_n の関数 $S(\theta_n)$ として表すと, $S(\theta_n) = \text{イ}$ となる。

$n \rightarrow \infty$ のとき $\theta_n \rightarrow 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\theta_n) = \text{ウ}$ となる。

解説

右図より, $\frac{d}{2} = \sin \frac{\theta_n}{2}$

よって, $d = 2 \sin \frac{\theta_n}{2}$

また,

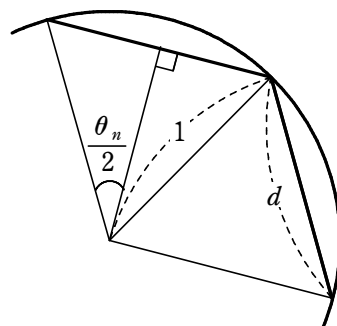
$$S(\theta_n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \theta_n = \frac{n}{2} \sin \theta_n$$

$\theta_n = \frac{2\pi}{n}$ であるから, $n = \frac{2\pi}{\theta_n}$ より

$$S(\theta_n) = \pi \cdot \frac{\sin \theta_n}{\theta_n}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\theta_n \rightarrow 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\theta_n) = \pi$$



(3) 三角関数の導関数

次の問題を考える。大阪大学の入試問題である。

例6

三角関数の極限に関する公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。

(解説)

前半はすでに解説してあるので省略

$\sin x$ の導関数は

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} \quad (\text{和積公式}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \end{aligned}$$

これを利用して, $\cos x, \tan x$ の導関数も求めておく。

$$(\cos x)' = \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right\}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$$

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

以上をまとめると、次のようになる。

三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例7

(1) 次の関数を微分せよ。

$$y = \tan 2x$$

(2) 関数 $y = \cos^2 x$ を微分せよ。

(3) $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin x}$ ($0 < x < \pi$) を求めよ。

(4) 関数 $y = \sin^3 2x$ を微分せよ。

(5) 関数 $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ のとき、 $f'(0)$ の値を求めよ。

(6) 関数 $y = x^2 \sin(3x + 5)$ の導関数を求めよ。

(7) 次の式を x で微分せよ。

$$y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

(8) x について微分可能な関数 y が条件 $x \tan y = 1$ を満たしているとき、 $\frac{dy}{dx}$ を x で表せ。

解説

$$(1) y' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

$$(2) y' = 2 \cos x \cdot (\cos x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \sin x \cos x$$

$$(3) \frac{d}{dx} \sqrt{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$(4) y' = 3 \sin^2 2x \cdot 2 \cos 2x = 6 \sin^2 2x \cos 2x$$

$$\begin{aligned}
 (5) f'(x) &= -\sin x \cdot \sin x + (1 + \cos x) \cos x \\
 &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x
 \end{aligned}$$

よって、 $f'(0) = 2$

$$(6) y' = 2x \sin(3x+5) + 3x^2 \cos(3x+5)$$

$$\begin{aligned} (7) y' &= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-1 - \sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x} \end{aligned}$$

$$(8) x \tan y = 1 \text{ であるから, } \tan y \neq 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\tan y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\frac{1}{\tan^2 y} \cdot \frac{1}{\cos^2 y}} = -\frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

例8

(1) a は定数とする。極限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)}$ を求めよ。

(2) 次の極限値を計算せよ。

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \sin^2 x - x^2 \sin^2 a}{x - a}$$

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = \pi$ を満たすとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2}$ を求めよ。

解説

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\sin(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} \cdot \frac{x-a}{\sin(x-a)}$$

$f(x) = \sin x$ とすると, $f'(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{\sin(x-a)} \\ &= f'(a) \cdot 1 \\ &= \cos a \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \sin^2 x - x^2 \sin^2 a}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2 \sin^2 x - a^2 \sin^2 a + a^2 \sin^2 a - x^2 \sin^2 a}{x-a}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ a^2 \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x - a} - (x + a) \sin^2 a \right\} \\
&f(x) = \sin^2 x \quad \text{とおくと} \quad f'(x) = 2 \sin x \cos x \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ a^2 \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - (x + a) \sin^2 a \right\} \\
&= a^2 f'(a) - 2a \sin^2 a \\
&= 2a^2 \sin a \cos a - 2a \sin^2 a = 2a \sin a (a \cos a - \sin a) \\
(3) \quad &\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos 2\theta)}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(0 + 1 - \cos 2\theta) - f(0)}{1 - \cos 2\theta} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{(2\theta)^2} \cdot 4 \\
&= f'(0) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\pi
\end{aligned}$$

補1

θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす実数とする。単位円周上の点 P を、動径 OP と x 軸の正の部分とのなす角が θ である点とし、点 Q を x 軸の正の部分の点で、点 P からの距離が 2 であるものとする。また、 $\theta = 0$ のときの点 Q の位置を A とする。

(1) 線分 OQ の長さを θ を使って表せ。

(2) 線分 QA の長さを L とするとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L}{\theta^2}$ を求めよ。

解説

(1) $OQ = x$ とおく

$\triangle OPQ$ において、余弦定理より

$$2^2 = 1^2 + x^2 - 2x \cos \theta$$

$$x^2 - 2(\cos \theta)x - 3 = 0$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 3}$$

$$\text{よって, } OQ = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 3}$$

(2) A (3, 0) より

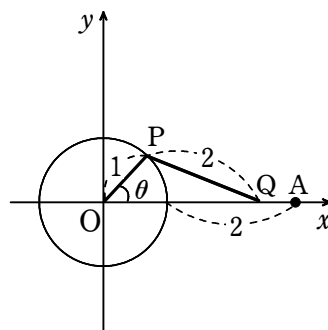
$$\begin{aligned} L &= OA - OQ = 3 - (\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 3}) \\ &= 3 - \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta + 3} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{L}{\theta^2} &= \frac{3 - \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta + 3}}{\theta^2} \\ &= \frac{(3 - \cos \theta)^2 - (\cos^2 \theta + 3)}{\theta^2(3 - \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 3})} \\ &= 6 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2(3 - \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 3})} \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L}{\theta^2} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 - 1 + 2} = \frac{3}{4}$$



補2

斜辺の長さが1である正 n 角錐を考える．つまり，底面を正 n 角形 $A_1A_2 \cdots A_n$ ，頂点を O で表せば $OA_1=OA_2=\cdots=OA_n=1$ である．そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする．

(1) C_n の体積 V_n を求めよ．

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めよ．

(解説)

(1) 角錐の高さを x ($0 < x < 1$) とおくと，

底面は半径 $\sqrt{1-x^2}$ の円に内接する正 n 角形であるから，その面積は

$$n \times \frac{1}{2} (\sqrt{1-x^2})^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} (1-x^2) \sin \frac{2\pi}{n}$$

よって，角錐の体積は

$$\frac{1}{3} \times \frac{n}{2} (1-x^2) \sin \frac{2\pi}{n} \times x = \frac{n}{6} x (1-x^2) \sin \frac{2\pi}{n}$$

$f(x) = x(1-x^2) = x - x^3$ とおくと

$f'(x) = 1 - 3x^2$ ， $0 < x < 1$ より

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(x)$ が最大となる

よって

$$V_n = \frac{n}{6} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\sqrt{3}}{27} n \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$$

補3

$0 < a < 1$ とする. 曲線 $y = x^2$ と $y = a \sin x$ の原点以外の交点の x 座標を $m(a)$ で表すとき, $\lim_{a \rightarrow +0} m(a) = 0$ であることを示せ. 更に,

$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{m(a)}{a}$ を求めよ.

解説

$m(a)$ は曲線 $y = x^2$ と $y = a \sin x$ の原点以外の交点の x 座標より

$$0 < m(a) < \frac{\pi}{2}$$

であり

$$\{m(a)\}^2 = a \sin m(a) \quad \dots\dots ①$$

$a \sin m(a) \leq a$ より

$$0 < \{m(a)\}^2 \leq a$$

$$0 < m(a) \leq \sqrt{a}$$

$\lim_{a \rightarrow +0} \sqrt{a} = 0$ であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{a \rightarrow +0} m(a) = 0$$

$m(a) > 0$ であるから, ①より

$$\frac{m(a)}{a} = \frac{\sin m(a)}{m(a)}$$

$\lim_{a \rightarrow +0} m(a) = 0$ より

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{m(a)}{a} = \lim_{m(a) \rightarrow 0} \frac{\sin m(a)}{m(a)} = 1$$

補4

α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数, n, k は正の整数として, 次の問いに答えよ.

(1) $\sin \frac{\alpha}{2n} \sin \frac{k\alpha}{n}$ を $\cos \frac{(2k-1)\alpha}{2n}$ と $\cos \frac{(2k+1)\alpha}{2n}$ を用いて表せ.

(2) $\sum_{k=1}^n \sin \frac{k\alpha}{n}$ と極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\alpha}{2n}$ を求めよ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\alpha}{n}$ を求めよ.

解説

$$(1) \sin \frac{\alpha}{2n} \sin \frac{k\alpha}{n} = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{(2k-1)\alpha}{2n} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2n} \right\}$$

(2) (1)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\alpha}{n} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2n}} \sum_{k=1}^n \left\{ \cos \frac{(2k-1)\alpha}{2n} - \cos \frac{(2k+1)\alpha}{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2n}} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2n} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2n} \right\} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2n} = t \text{ とおくと, } n = \frac{\alpha}{2t}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $t \rightarrow +0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\alpha}{2n} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\alpha}{2t} \sin t = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} \right) = \frac{\alpha}{2} \dots \textcircled{2}$$

(3) ①より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\alpha}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\alpha}{n} = \frac{1}{2n \sin \frac{\alpha}{2n}} \left\{ \cos \frac{\alpha}{2n} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2n} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\alpha}{2n} = \cos 0 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \alpha = \cos \alpha$$

と②より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\alpha}{n} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\alpha}{2}} (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \alpha)$$

別解 区分求積法を利用 (積分法を学んでから)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k\alpha}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(\alpha \cdot \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \sin \alpha x dx \\ &= \left[-\frac{\cos \alpha x}{\alpha} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$