

1.7 複素数

(1) 複素数

実数の2乗は、0または正の数で、負の数になることはないから、2次方程式 $x^2 = -1$ は実数の範囲では解をもたない。

そこで、2次方程式が常に解をもつように数の範囲を広げることを考える。

2乗すると -1 になる新しい数を1つ考え、これを文字 i で表し、虚数単位という。すなわち、 $i^2 = -1$ とする。

さらに、 $5+2i$ のように、2つの実数 a, b を用いて $a+bi$ の形に表される数を考え、これを複素数という。

複素数 $a+bi$ について、 a を実部、 b を虚部という。例えば、 $5+2i$ の実部は5であり、虚部は2である。

虚部が0である複素数 $a+0i$ は実数 a を表すものとする。

$b \neq 0$ のとき、複素数 $a+bi$ を虚数といい、とくに $a=0, b \neq 0$ のとき、すなわち bi を純虚数という。例えば、 $5+2i, 5-2i, 2i, -2i$ は虚数であり、この中で $2i, -2i$ は純虚数である。

以下、 $a+bi$ や $c+di$ などでは、文字 a, b, c, d は実数を表す。

2つの複素数が等しいのは、実部も虚部も等しいときである。

複素数の相等

a, b, c, d が実数であるとき、

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ かつ } b=d$$

特に $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ かつ } b=0$

2つの虚数、虚数と実数の間には大小関係は考えない。

大小関係を定めると、例えば、

$$i > 0 \text{ ならば、両辺に } i \text{ をかけると、 } i^2 > 0 \quad \therefore -1 > 0$$

$$i = 0 \text{ ならば、両辺に } i \text{ をかけると、 } i^2 = 0 \quad \therefore -1 = 0$$

$$i < 0 \text{ ならば、両辺に } i \text{ をかけると、 } i^2 > 0 \quad \therefore -1 > 0$$

などとなり矛盾し、破綻するからである。

また、虚数は正、負は考えない。

例1

(1) $(2+3i)x+(4+5i)y=6+7i$ を満たす実数 x, y の値は、それぞれ $x = \boxed{}, y = \boxed{}$ である。

(2) 次の方程式を解け。ただし、 i は虚数単位、 x は実数とする。

$$(1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$$

解説

$$(1) (2+3i)x+(4+5i)y=6+7i$$

$$2x+4y-6+(3x+5y-7)i=0$$

$2x+4y-6, 3x+5y-7$ は実数であるから

$$\begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ 3x+5y-7=0 \end{cases}$$

$$\therefore x=-1, y=2$$

注 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$ を用いるとき、 a, b, c, d が実数という条件がないと使えない。

例えば、 $a+bi=5+2i$ において a, b を複素数とすると、 $(a, b)=(5, 2)$ のときも成り立つが、 $(a, b)=(2i, -5i)$ でも $(a, b)=(6, 2+i)$ でもよい。

$$(2) (1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$$

$$x^2-x-2+(x^2-3x+2)i=0$$

x は実数であるから、 x^2-x-2, x^2-3x+2 も実数より

$$x^2-x-2=0 \dots \textcircled{1} \text{ かつ } x^2-3x+2=0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } (x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1, 2$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } (x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1, 2$$

よって、 $x=2$

複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を、互いに共役な複素数という。実数 a と共役な複素数は a 自身である。複素数 α と共役な複素数を $\overline{\alpha}$ と表す。

一般に、複素数の四則計算の結果は、次のようになる。

複素数の演算

1. 加法 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
2. 減法 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
3. 乗法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
4. 除法 $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{bc-ad}{a^2+b^2}i$

したがって、2つの複素数の和、差、積、商もまた複素数となる。

これらの計算は、 i を文字のように扱って計算する。ただし、 i^2 が出てくれば、それを -1 におき換えるように計算すればよい。乗法は、

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= ac-bd+(ad+bc)i\end{aligned}$$

複素数 α と共役な複素数を $\overline{\alpha}$ で表す。

互いに共役な複素数 $\alpha=a+bi$, $\overline{\alpha}=a-bi$ の和と積は

$$\begin{aligned}\alpha+\overline{\alpha} &= (a+bi)+(a-bi)=2a \\ \alpha\overline{\alpha} &= (a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2\end{aligned}$$

となり、ともに実数である。

除法は、分母を実数にするために、分母と分子に分母の共役複素数をかけて、

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

となる。

α, β を複素数とすると、実数の場合と同様に、次のことが成り立つ。

$$\alpha\beta=0 \text{ ならば } \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

例2

- (1) i が虚数単位るとき, $(2-3i)(4+5i)$ を簡単にせよ.
- (2) i を虚数単位とする。複素数 $(2-i)^3$ の実部は である。
- (3) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$ を簡単にせよ。ただし, i は虚数単位を表す。
- (4) 虚数単位 i に対して, $i+i^2+i^3+\dots+i^{50}$ を計算せよ。

解説

$$(1) (2-3i)(4+5i) = 8+10i-12i-15i^2 = 23-2i$$

$$(2) (2-i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 \\ = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$$

よって, 複素数 $(2-i)^3$ の実部は 2

$$(3) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{(2-i)i}{5i \cdot i} \\ = \frac{3+4i+6i-8}{3^2+4^2} + \frac{2i+1}{-5} \\ = \frac{-5+10i}{25} - \frac{1+2i}{5} \\ = \frac{-1+2i}{5} - \frac{1+2i}{5} = -\frac{2}{5}$$

$$(4) i^2 = -1, i^3 = i \cdot i^2 = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \text{ より}$$

$$i+i^2+i^3+i^4 = i-1-i+1=0$$

よって

$$i+i^2+i^3+\dots+i^{50} = (i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) + \\ \dots + i^{44}(i+i^2+i^3+i^4) + i^{49} + i^{50} \\ = i(i^2)^{24} + (i^2)^{25} = i(-1)^{24} + (-1)^{25} = i-1$$

例3

a は, $-1 < a < \frac{1}{3}$ を満たす実数とする。

$\frac{3+i}{\sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{9a^2-6a+1}i}$ が実数であるとき, a の値は である。ただし, i は虚数単位とする。

解説

$-1 < a < \frac{1}{3}$ から, $a+1 > 0$, $3a-1 < 0$ より

$$\sqrt{a^2+2a+1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1$$

$$\sqrt{9a^2-6a+1} = \sqrt{(3a-1)^2} = |3a-1| = 1-3a$$

よって,

$$\begin{aligned} & \frac{3+i}{\sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{9a^2-6a+1}i} \\ &= \frac{3+i}{a+1+(1-3a)i} \\ &= \frac{(3+i)\{a+1-(1-3a)i\}}{\{a+1+(1-3a)i\}\{a+1-(1-3a)i\}} \\ &= \frac{3(a+1)-3(1-3a)i+(a+1)i+1-3a}{(a+1)^2+(1-3a)^2} \\ &= \frac{4+(10a-2)i}{(a+1)^2+(1-3a)^2} \end{aligned}$$

が実数であるとき, $10a-2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{5}$

例4

(1) x, y を実数とし, i を虚数単位とする。複素数 $x+yi$ が等式

$(3-2i)(x+yi)=11-16i$ を満たすとき, x, y の値を求めよ。

(2) i を虚数単位とする。等式 $(-1+2i)z+4-8i=(2-i)z+7+7i$ を満たす複素数 z は $z=\boxed{}$ である。

解説

(1) 与式より

$$\begin{aligned} x+yi &= \frac{11-16i}{3-2i} \\ &= \frac{(11-16i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = 5-2i \end{aligned}$$

x, y は実数より, $x=5, y=-2$

別解 展開して, 複素数の相等を利用する。

(2) 等式より

$$\begin{aligned} (-3+3i)z &= 3+15i \\ z &= \frac{3+15i}{-3+3i} = \frac{1+5i}{-1+i} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i \end{aligned}$$

例5

(1) i を虚数単位として、複素数 $x = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$ を考える。 x と共役な複素数を $\bar{x}$ とするとき、 $x^3 + \bar{x}^3$ の値を求めよ。

(2) $x = 1 + i$ のとき、 $x^3 - x^2 + 2x + 1$ の値を求めよ。ここで i は虚数単位を表す。

(解説)

(1) $x = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$, $\bar{x} = \sqrt{3} - \sqrt{7}i$ より

$$x + \bar{x} = \sqrt{3} + \sqrt{7}i + \sqrt{3} - \sqrt{7}i = 2\sqrt{3}$$

$$x\bar{x} = (\sqrt{3} + \sqrt{7}i)(\sqrt{3} - \sqrt{7}i) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 = 10$$

よって

$$\begin{aligned} x^3 + \bar{x}^3 &= (x + \bar{x})^3 - 3x\bar{x}(x + \bar{x}) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= -36\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) $x = 1 + i$ より

$$x - 1 = i$$

両辺を 2 乗して

$$(x - 1)^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 2x + 2)(x + 1) + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ より}$$

$$= 2x - 1$$

$$= 2(1 + i) - 1$$

$$= 1 + 2i$$

(3) 負の数の平方根

複素数の範囲では、負の数の平方根を考えられる。例えば、

$$(\sqrt{2}i)^2 = (\sqrt{2})^2 i^2 = -2, (-\sqrt{2}i)^2 = (-\sqrt{2})^2 i^2 = -2$$

であるから、 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$ は、ともに -2 の平方根である。

-2 の平方根が $\pm\sqrt{2}i$ 以外にないことは、次のようにして確かめられる。

$$x^2 + 2 = x^2 - (-2) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$$

よって、方程式 $x^2 = -2$ すなわち $x^2 + 2 = 0$ の解は $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$ であり、これら以外に -2 の平方根はない。

一般に、 $a > 0$ のとき、負の数 $-a$ の平方根は $\sqrt{a}i$ と $-\sqrt{a}i$ である。
 ここで、記号 $\sqrt{-a}$ の意味を、次のように定める。

$a > 0$ のとき $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 、特に $\sqrt{-1} = i$

このように定めると、次のことがいえる。

負の数の平方根

$a > 0$ のとき、 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ すなわち $\pm\sqrt{a}i$

【注】 -1 の平方根を、 0 以上の数の平方根の拡張として、 $\sqrt{\quad}$ という記号を使って $\pm\sqrt{-1}$ と表すために $\sqrt{-1} = i$ とするだけで、 $\sqrt{-1} = i$ は、 $i^2 = -1$ より導かれたものではない。つまり、 $i^2 = -1$ というのは、数 i についての定義であり、 $i = \sqrt{-1}$ というのは、記号 $\sqrt{-1}$ についての定義といえる。

【注】 $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \sqrt{-1} = \sqrt{a}i$ と考えればよいが、
 例えば、

$$\begin{aligned}\sqrt{-5} \sqrt{-2} &= \sqrt{5}i \sqrt{2}i = -\sqrt{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}} &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}i} = -\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}i\end{aligned}$$

のように、 $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ は、 $a < 0, b < 0$ のときは成り立たず、

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ は、 $a > 0, b < 0$ のときは成り立たない。すなわち、

$\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ は常に成り立つわけではないので、

ルートの中身が負のときは、まず $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ と直してから計算する。

例6

$A = \frac{\sqrt{-3} \sqrt{-2} + \sqrt{-2}}{a + \sqrt{-3}}$ が実数となるような実数 a を定めると、 a
 $=$ であり、 $A =$ である。

解説

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{-3}\sqrt{-2} + \sqrt{-2}}{a + \sqrt{-3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}i \cdot \sqrt{2}i + \sqrt{2}i}{a + \sqrt{3}i} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i}{a + \sqrt{3}i} \\
&= \frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3} + i)(a - \sqrt{3}i)}{(a + \sqrt{3}i)(a - \sqrt{3}i)} \\
&= \frac{\sqrt{2}\{(-\sqrt{3}a + \sqrt{3}) + (a + 3)i\}}{a^2 + 3}
\end{aligned}$$

A が実数となるとき, $a + 3 = 0 \quad \therefore a = -3$

このとき

$$A = \frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{3})}{12} = \frac{4\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) i の剰余の問題への応用

整式を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めるとき, $x = i$ を代入すると簡単に求めることができます。

例7

(1) 整式 x^{2011} を $x^2 + 1$ で割った余りを求めよ。

(2) x についての整式 $x^7 + ax^5 + bx^2 + 1$ が $x^2 + 1$ で割り切れるとき, 実数 a, b の値を求めよ。

解説

(1) x^{2011} を $x^2 + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ (a, b は実数) とおくと

$$x^{2011} = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$$

$x = i$ (i は虚数単位) を代入すると

$$i^{2011} = ai + b$$

ここで, $i^2 = -1$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ であるから

$$i^{2011} = i^{4 \cdot 502 + 3} = (i^4)^{502} \cdot i^3 = i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

よって

$$-i = ai + b$$

a, b は実数であるから

$$a = -1, b = 0$$

よって余りは, $-x$

(2) $x^7 + ax^5 + bx^2 + 1$ を $x^2 + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$x^7 + ax^5 + bx^2 + 1 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$x = i$ を代入して

$$i^7 + ai^5 + bi^2 + 1 = 0$$

$$-i + ai - b + 1 = 0$$

$$-b + 1 + (a - 1)i = 0$$

a, b は実数であるから

$$-b + 1 = 0, \quad a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

補1

$(3+i)x+(1-i)y=5+3i$ を満たす実数 x, y の組は, $(x, y)=$ ^ア である。また, $z^2=i$ となる複素数 z をすべて求めて, $a+bi$ (a, b は実数) の形で表すと ^イ となる。ただし, i は虚数単位とする。

解説

(ア) 与えられた等式を計算すると

$$(3x+y)+(x-y)i=5+3i$$

x, y は実数であるから, $3x+y, x-y$ も実数より

$$3x+y=5, x-y=3$$

これを解いて

$$(x, y)=(2, -1)$$

(イ) $z=x+yi$ (x, y は実数) とおくと

$$(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$$

$z^2=i$ より

$$(x^2-y^2)+2xyi=i$$

x, y は実数であるから, $x^2-y^2, 2xy$ も実数より

$$x^2-y^2=0, 2xy=1$$

$x^2-y^2=0$ より

$$(x+y)(x-y)=0$$

$$\therefore x=\pm y$$

$x=y$ のとき $(x, y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順)

$x=-y$ のとき $-2x^2=1$ となり不適

よって

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ (複号同順)}$$

補2

x^{2002} を x^4-1 で割った余りを求めよ.

(解説)

x^{2002} を x^4-1 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを ax^3+bx^2+cx+d (a, b, c, d は実数) とおくと

$$\begin{aligned}x^{2002} &= (x^4-1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= (x^2+1)(x+1)(x-1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d\end{aligned}$$

両辺に $x=1$ を代入すると $1=a+b+c+d \cdots \textcircled{1}$

両辺に $x=-1$ を代入すると $1=-a+b-c+d \cdots \textcircled{2}$

両辺に $x=i$ を代入すると

$$\begin{aligned}-1 &= -ai - b + ci + d \\ (-b+d) + (-a+c)i &= -1\end{aligned}$$

a, b, c, d は実数であるから, $-b+d, -a+c$ も実数より

$$-b+d = -1 \cdots \textcircled{3}, \quad -a+c = 0 \cdots \textcircled{4}$$

これを解くと

$$a=0, \quad b=1, \quad c=0, \quad d=0$$

よって余りは x^2