

高3数学 標準問題演習 演習 9. 指数・対数関数

1 [福岡教育大]

- (1) x がすべての実数を動くとき、 $2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする. 次の (ア), (イ) に答えよ.
(ア) m の値を求め、 $2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ.
(イ) $k > m$ のとき、 $2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ.
(2) a を定数とし、 $1 < a \leq 2$ とする. 方程式 $4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき、その 3 つの実数解をすべて求めよ.

2 [北海道教育大]

x の方程式 $(\log_3 x)^2 - |\log_3 x^2| - \log_3 x = k$ (k は定数) が相異なる 4 個の実数解 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をもつとき、

- (1) k の値の範囲を求めよ.
(2) 積 $\alpha\beta\gamma\delta$ の値を求めよ.

3 [(1) 2008 甲南大 (2) 2003 早稲田大 (3) 2000 東京学芸大]

- (1) $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 不等式 $a^x + a^{1-x} < 1 + a$ を満たす x の範囲を求めよ.
(2) $a > 0$, $a \neq 1$ とする. このとき、 x の不等式 $\log_a(x+2) \geq \log_{a^2}(3x+16)$ を解け.
(3) 実数 a, b が $a > 0$, $a \neq 1$, $b = a^2$ を満たすとする. このとき、不等式 $\log_a(x+a) < \log_b(x+b)$ を満たす x の値の範囲を a を用いて表せ.

4 [2009 京都大]

x, y は $x \neq 1$, $y \neq 1$ を満たす正の数で、不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする. このとき x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ.

5 [2000 岩手大]

- (1) $\log_{10} 2$ は $\frac{3}{10}$ より大きいことを示せ. 更に、 $80 < 81$ および $243 < 250$ であることに注意して、 $\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{23}{75}$, $\frac{19}{40} < \log_{10} 3 < \frac{12}{25}$ であることを示せ.
(2) $\left(\frac{5}{9}\right)^n$ の小数第 5 位に初めて 0 でない数字が現れるような、最小の自然数 n を求めよ.

高3数学 標準問題演習 演習 9. 指数・対数関数

6 [I . 2018 早稲田大 II . 2005 慶応義塾大]

I . 次の問いに答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$, $\log_{10} 11 = 1.0414$ とする。

- (1) 3^{20} の 1 の位の数字を求めよ。
- (2) n を自然数とし, 3^n が 21 桁で 1 の位の数字が 7 となるとき, n の値を求めよ。
- (3) 7^{70} の最高位の数字を求めよ。
- (4) 7^{70} の最高位の次の位の数字を求めよ。

II . 0.15^{70} を小数で表すと, 小数第 ア 位に初めて 0 でない数字が現れる。その初めて現れる 0 でない数字は イ である。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

7 [I . 金沢大 II . 2019 駒澤大]

I . $N = 2^{131} + 192$ とする。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

- (1) 正の整数 n に対し, $2^{3n} - 1$ は 7 の倍数であることを示せ。
- (2) N は 224 の倍数であることを示せ。
- (3) N は何桁の数か。
- (4) N を 224 で割った商は何桁の数か。

II . 2^{2019} は ア 桁の数であり, 一の位の数字は イ である。 3^{2019} は ウ 桁の数であり, 一の位の数字は エ である。 $3^{2019} - 2^{2019}$ は オ 桁の数であり, 一の位の数字は カ である。 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算せよ。

8 [2006 大阪大]

自然数 m , n と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を, 等式 $\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$ が成り立つようにとる。

- (1) 自然数 m , n を求めよ。
- (2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

9 [2002 千葉大]

- (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ.
- (2) n が正の整数のとき, $\log_2 n$ が整数でない有理数となることがあるかどうか調べよ.