

発展問題演習 8. 漸化式

①

$$a_1 = (a + \frac{1}{4})^2$$

$$a_1^2 - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{16} = 0$$

$$(4a_1^2 - 2a_1 + 1) = 0$$

$$(4a_1 - 1)^2 = 0 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_n = (a_{n-1} + \frac{1}{4})^2 \quad (n \geq 2)$$

$$= a_{n-1}^2 + \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{16}$$

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 - \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{16} = 0$$

$$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = 0$$

$$(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\therefore a_n = -a_{n-1} \text{ または } a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} \quad \dots ①$$

a_n が 0 にならないと仮定

$$\therefore a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

$$\{a_n\} \text{ は初項 } a_1 = \frac{1}{4}$$

公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$= \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

② 問題文を満たすとき

$$n = 2, \dots, 100 \text{ までの } n \text{ について}$$

i) ① の場合と② の場合で連続して 2 回あるとき

ii) ① の場合と② の場合で連続して 2 回あるとき

と仮定する。

$$i) \text{ のとき } a_{100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 97 = \frac{195}{4}$$

$$ii) \text{ のとき } a_{100} = -(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 98) = -\frac{197}{4}$$

<point>

1. 漸化式 (手差型)

②

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

$\begin{matrix} +1 & +1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} & \times \frac{1}{2} \end{matrix}$

③ $\{a_{2m-1}\}$ の隣接する項の差は $m+1$ より

$$a_{2m} - a_{2m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} (k+1) \quad (m \geq 2)$$

$$= 1 + \frac{m(m+1)}{2} - 1$$

$$= \frac{m(m+1)}{2}$$

これは $m=1$ のときも成り立つので

$$a_{2m} - a_{2m-1} = \frac{m(m+1)}{2} \quad \dots ①$$

$$a_{2m} = a_{2m-1} + \frac{m+1}{2} = \frac{(m+1)^2}{2} \quad \dots ②$$

$a_{25} = 91, a_{26} = 98, a_{27} = 105$ より (a_{2m} は平方数)

$$a_n \geq 100 \text{ となる } n \text{ について } n \geq 27 \text{ となる}$$

④ ① において $n = 2m-1$ とおくと ($m = \frac{n+1}{2}$)

$$a_n = \frac{1}{8}(n+1)(n+3) = \frac{1}{8}(n^2 + 4n + 3)$$

⑤ ② において $n = 2m$ とおくと ($m = \frac{n}{2}$) $= \frac{1}{16}(2n^2 + 8n + 6)$

$$a_n = \frac{1}{8}(n+2)^2 = \frac{1}{8}(n^2 + 4n + 4)$$

これをまとめると

$$= \frac{1}{16}(2n^2 + 8n + 8)$$

$$a_n = \frac{1}{16}(2n^2 + 8n + 8)$$

注.

①, ② には n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要がある。
 ③ には n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要がある。

④ には n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要がある。

⑤ には n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要がある。

⑥ には n が偶数のときと奇数のときで分けて考える必要がある。

9

$$d) a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1} - 17 \cdot 2^{n+1}$$

両辺 2^{n+1} で割る

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 4n - 17$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{2} = 18$$

$$b_{n+1} = b_n + 4n - 17$$

$\{b_n\}$ の累和を求め $\{c_n\}$ とすると $c_n = 4n - 17$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad (n \geq 2)$$

$$= (18 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 17))$$

$$= (18 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)(n-17)(n-1))$$

$$= 2n^2 - 16n + 95$$

よって $a_n = (2n^2 - 16n + 95) \cdot 2^n$

$$b_n = 2n^2 - 16n + 95 \quad (n \geq 1)$$

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ より}$$

$$a_n = 2^n b_n$$

$$= (2n^2 - 16n + 95) \cdot 2^n$$

e) $a_n > a_{n+1}$ より

$$(2n^2 - 16n + 95) \cdot 2^n > \{2(n+1)^2 - 16(n+1) + 95\} \cdot 2^{n+1}$$

$$2n^2 - 16n + 95 > 2(2n^2 - 16n + 18)$$

$$2n^2 - 16n + 1 < 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{113}}{4} < n < \frac{11 + \sqrt{113}}{4}$$

$$n > 0 \text{ より } 1 \leq n \leq 5$$

$$n \geq 6 \text{ とすると } a_n < a_{n+1} \text{ より}$$

$$a_1 > a_2 > \dots > a_5 < a_6 < a_7 < \dots$$

$$a_n \text{ かつ } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 0$$

f) $a_n \leq 0$ とすると

$$2n^2 - 16n + 95 \leq 0$$

$$(n-7)(2n-5) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq n \leq 7$$

$$a_3 = 96, a_4 = 20, a_5 = 32, a_6 = 0, a_7 = -14, \dots \text{ より}$$

$$S_n \text{ かつ } n = 6, 7 \text{ のとき } S_n = 1$$

<point>

1. 漸化式 (1階線形)

4

d) $a_k < 1$ とすると

$$a_{k+1} = a_k - 4 < 1 \text{ より}$$

a_n は1階線形漸化式 $a_n < 1$ であるから、 $a_n < 1$ とする

$$a_{n+1} = a_n - 4$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = a$

公差 -4 の等差数列より

$$a_n = a + (n-1) \cdot (-4)$$

$$= -4n + a + 4$$

e) $a_k \geq 3$ とすると

$$a_{k+1} = 3(a_k - 2) \geq 3 \text{ より}$$

a_n は1階線形漸化式 $a_n \geq 3$ であるから、 $a_n \geq 3$ とする

$$a_{n+1} = 3a_n - 6$$

$$\alpha = 3\alpha - 6$$

$$\therefore \alpha = 3$$

$$a_{n+1} - 3 = 3(a_n - 3)$$

$\{a_n - 3\}$ は初項 $a_1 - 3 = a - 3$

公差 3 の等差数列より

$$a_n - 3 = (a - 3) \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = (a - 3) \cdot 3^{n-1} + 3$$

$$g) a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n - 6 & (a_n \geq 1) \\ a_n - 4 & (a_n < 1) \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{242}{81} \text{ とすると } (= 3 - \frac{1}{81})$$

$$a_2 = 3 - \frac{1}{27} - 6 = 3 - \frac{1}{27}$$

$$a_3 = 3 - \frac{1}{9} - 6 = 3 - \frac{1}{9}$$

$$a_4 = 3 - \frac{1}{3} - 6 = 3 - \frac{1}{3}$$

$$a_5 = 3 - 1 - 6 = 2$$

$$a_6 = 0$$

よって $a_n < 1$ とすると $a_n = 6$

$$a_6 = 0 \text{ かつ } a_7 = 3 \text{ かつ } a_8 = 0 \text{ かつ } a_9 = 3 \text{ かつ } a_{10} = 0 \text{ かつ } a_{11} = 3$$

$$a_n = \begin{cases} 3 - 3^{n-1} & (n = 1, 2, 3, 4, 5) \\ -4(n-6) & (n = 6, 7, \dots) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3) \{a_n\} \text{ に関する } C_n = b_{n+1} - 3b_n = a_n - 2a_{n-1} - 3(a_{n-1} - 2a_{n-2}) \\ = a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 1 \end{aligned}$$

$\{C_n\}$ は a_n に関する 1 次

$$C_n = b^n$$

$$C_n = b_{n+1} - 3b_n \neq 0$$

$$b_{n+1} - 3b_n = b^n$$

$$b_{n+1} = 3b_n + b^n$$

これを b^{n+1} に変換する

$$\frac{b_{n+1}}{b^{n+1}} = \frac{3}{b} \cdot \frac{b_n}{b^n} + \frac{1}{b}$$

$$d_n = \frac{b_n}{b^n} \text{ とおくと } d_n = b_n = a_n - 2a_{n-1} = 0$$

$$d_{n+1} = \frac{3}{b} d_n + \frac{1}{b}$$

$$x = \frac{3}{b} x + \frac{1}{b}$$

$$\therefore x = \frac{1}{b-3}$$

$$d_{n+1} - \frac{1}{b-3} = \frac{3}{b} (d_n - \frac{1}{b-3})$$

$$\{d_n - \frac{1}{b-3}\} \text{ は 初項 } d_0 - \frac{1}{b-3} = -\frac{1}{b-3}$$

$\{C_n\}$ は a_n に関する 1 次

$$d_n - \frac{1}{b-3} = -\frac{1}{b-3} \left(\frac{3}{b}\right)^n$$

$$\therefore d_n = \frac{1}{b-3} \left\{1 - \left(\frac{3}{b}\right)^n\right\}$$

$$d_n = \frac{b_n}{b^n} \neq 0$$

$$b_n = b^n d_n$$

$$= \frac{1}{b-3} (b^n - 3^n)$$

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n \neq 0$$

$$a_{n+1} - 2a_n = \frac{1}{b-3} (b^n - 3^n)$$

$$a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{b-3} (b^n - 3^n)$$

$$a_{n+1} \text{ と } 5^{n+1} \text{ と } 3^{n+1} \text{ は } Q \text{ (} a_n \text{ と } 5^n \text{ と } 3^n \text{) と } \frac{1}{b-3} \text{ の } Q$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \cdot 5^n + 3^n \quad \therefore s = -\frac{1}{b-3}, t = \frac{1}{b-3}$$

5/

$$a_{n+1} - \frac{1}{b-3} \cdot 5^{n+1} + \frac{1}{b-3} \cdot 3^{n+1} = 2(a_n - \frac{1}{b-3} \cdot 5^n + \frac{1}{b-3} \cdot 3^n)$$

$$\{a_n - \frac{1}{b-3} \cdot 5^n + \frac{1}{b-3} \cdot 3^n\} \text{ は 初項 } a_0 - \frac{1}{b-3} + \frac{1}{b-3} = \frac{4}{b-3}$$

$\{C_n\}$ は a_n に関する 1 次

$$a_n - \frac{1}{b-3} \cdot 5^n + \frac{1}{b-3} \cdot 3^n = \frac{4}{b-3} \cdot 2^n$$

$$\therefore a_n = \frac{4}{b-3} \cdot 2^n + \frac{1}{b-3} \cdot 3^n - \frac{1}{b-3} \cdot 5^n$$

<point>

1. 漸化式 (差分型) $a_{n+1} = p a_n + q$ ($p \neq 1, q \neq 0$)

5/

$$d) x^3 | 10x^2 - 9 | x + 30$$

$$x^3 | 10x^2 - 9 | x - 30 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 21 & 1 & -10 & 91 & -30 \\ & & 2 & -16 & 90 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$(x-2)(x-3)(x-5) = 0 \quad \therefore \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$$

$$e) a_{n+1} = 10a_n + 9 | a_{n+1} - 30a_n = 0$$

$$a_{n+1} - 2a_n = 8(a_n - 2a_{n-1}) + 15(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 0$$

$$b_n = a_{n+1} - 2a_n \text{ とおくと}$$

$$b_{n+1} = 8b_n + 15b_{n-1} = 0$$

$$b_{n+1} - 3b_n = 5(b_n - 3b_{n-1}) = 0$$

$$C_n = b_{n+1} - 3b_n \text{ とおくと}$$

$$C_{n+1} = 5C_n$$

[6]

d) $x_1 = a$

$$x_2 = \frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-a} \quad (a \neq 1)$$

$$x_3 = \frac{1}{1-x_2} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} = 1-\frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$x_4 = \frac{1}{1-x_3} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{a})} = a$$

$\vdots < 4 \leq c$

$$a = \frac{1}{1-a} \text{ と } 3 \leq c$$

$$a(1-a) = 1$$

$$a^2 - a + 1 = 0$$

$$a \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上 } \text{解} \text{ あり } a \neq \frac{1}{1-a}$$

$$a = 1 - \frac{1}{a} \text{ と } 3 \leq c$$

$$a^2 - a + 1 = 0$$

$$\therefore \text{解} \text{ は } a = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{1-a} = 1 - \frac{1}{a} \text{ と } 3 \leq c$$

$$a = a(1-a)(1-a)$$

$$a^2 - a + 1 = 0$$

$$\text{よ} \frac{1}{1-a} \neq 1 - \frac{1}{a}$$

$\therefore \text{解} \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上 } \text{解} \text{ あり } 3 \leq c$

$$a, \frac{1}{1-a}, 1 - \frac{1}{a} \quad (a \neq 0, 1)$$

e) $\frac{1}{1-a}$ が整数 k かつ $1 \leq k \leq 3$

$$1-a = \pm 1 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a \text{ と } 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \text{ と } 3 \leq c \text{ あり } 2 \leq 3$$

$$1 - \frac{1}{a} \text{ が整数 } k \text{ と } 1 \leq k \leq 3$$

$$a = -1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots$$

$$a = 1 - \frac{1}{a} \text{ と } \frac{1}{1-a} = \frac{1}{2} \text{ と } 3 \leq c \text{ あり } 2 \leq 3$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ と } 1 - \frac{1}{a} = 2 \text{ と } 3 \leq c \text{ あり } 2 \leq 3$$

$$a = -1, 2, \frac{1}{2}$$

<point>

1. 漸化式 (初項を2)

[7]

d) $\sqrt[n]{2} < a_n$ ($n=1, 2, \dots$) $\sqrt[n]{2} < a_n \leq \sqrt[n]{2} + \frac{1}{n}$

$$\therefore n=1 \text{ なら } a_1 \leq 3$$

$$a_1 > \sqrt[3]{2} \text{ かつ } a_1 < 4 \leq 7$$

$$\therefore n=k \text{ (} k=1, 2, \dots \text{)} \text{ だと } a_k \text{ は } 2 \text{ と } 4 \text{ の間}$$

$$a_k > \sqrt[k]{2}$$

$$a_1 = k+1 \text{ かつ } a_1 < 4 \leq 7 \text{ と } 2 \leq 3$$

$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_k^2 - 2}{2a_k^2} = \frac{2a_k^2 - a_k^2 + 2}{2a_k^2} = \frac{a_k^2 + 2}{2a_k^2}$$

$$= \frac{2a_k^2 - a_k^2 + 2}{2a_k^2} = \frac{a_k^2 + 2}{2a_k^2} \quad \begin{array}{r} \sqrt[3]{2} \quad 2 - \sqrt[3]{2} \quad 0 \quad 2 \\ 2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} - 2 \\ \hline 2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \quad 0 \end{array}$$

$$= \frac{2a_k^2 - a_k^2 + 2}{2a_k^2} (a_k - \sqrt[3]{2}) > 0 \quad \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{a_k}$$

$$\therefore \text{よ} \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{a_k} > 0 \quad = \frac{(2a_k^2 - a_k^2 + 2)(a_k - \sqrt[3]{2})^2}{2a_k^2} > 0$$

$$\therefore \text{よ} \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{a_k} > 0 \text{ かつ } \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{a_k} > 0$$

$$\sqrt[3]{2} < a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\therefore \sqrt[3]{2} < a_{n+1}$$

$$\boxed{a_{n+1} < a_n}$$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n^2} \right)$$

$$= \frac{a_n^2 - 2}{2a_n^2} > 0$$

$$\therefore a_{n+1} < a_n \quad \square$$

$$a_{n+1} = \frac{2(a_n^2 + 1)}{2a_n^2}$$

e) $1.2^2 = 1.728, 1.3^2 = 2.197$ かつ $1.2 < \sqrt[3]{2} < 1.3$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \quad \left| a_2 - \sqrt[3]{2} \right| = \left| \frac{3}{2} - \sqrt[3]{2} \right| > \left| \frac{3}{2} - 1.3 \right| > 0.2$$

$$a_3 = \frac{95}{27} \quad \left| a_3 - \sqrt[3]{2} \right| = \left| \frac{95}{27} - \sqrt[3]{2} \right| < \left| \frac{95}{27} - 1.2 \right| < \frac{1}{10}$$

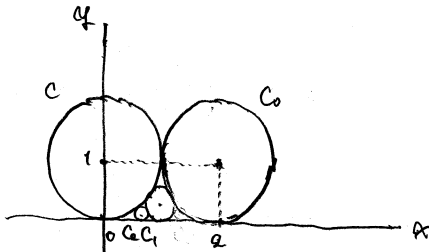
$$n=3 \text{ かつ}$$

<point>

$$1, 2, 3 \text{ かつ}$$

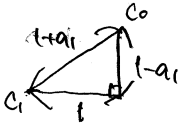
8

d)



C の中心 $\in C$

C_n の中心 $\in C_n (n=0, 1, 2, \dots) \geq 2$



$\triangle$ 平方の定理より

$$(1+a_1)^2 = 1 + (1-a_1)^2$$

$$1 + 2a_1 + a_1^2 = 2 - 2a_1 + a_1^2$$

$$4a_1 = 1 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad H H_n &= \sqrt{(1+a_n)^2 - (1-a_n)^2} \\ &= 2a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H C_{n+1} &= \sqrt{(1+a_{n+1})^2 - (1-a_{n+1})^2} \\ &= 2a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_n C_{n+1} &= \sqrt{(a_n + a_{n+1})^2 - (a_n - a_{n+1})^2} \\ &= 2a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

$$H H_n = (H C_{n+1} + H_n C_{n+1})$$

$$2a_n = 2a_n + 2a_n a_{n+1}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1$$

$$s_n = \frac{1}{a_n} \geq 2 \quad s_1 = \frac{1}{a_1} = 2$$

$$s_{n+1} = s_n + 1$$

③, $\{s_n\}$ は初項 $s_1 = 2$.

$\{s_n\}$ の公差は 1 である

$$s_n = 2 + (n-1) = n+1$$

$$s_n = \frac{1}{a_n} \quad \text{より}$$

$$a_n = \frac{1}{s_n} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

9

d) 以下, $a_n \geq 1$ とし

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 7a_n \quad \text{より}$$

$$a_{n+2} \equiv 3a_{n+1} - 7a_n$$

$$\equiv a_{n+1} - a_n$$

よって

$$a_1 \equiv 1, a_2 \equiv 1$$

$$a_3 \equiv a_2 - a_1 \equiv 1 - 1 = 0$$

$$a_4 \equiv a_3 - a_2 \equiv 0 - 1 = -1$$

$$a_5 \equiv a_4 - a_3 \equiv -1 - 0 = -1$$

$$a_6 \equiv a_5 - a_4 \equiv -1 - (-1) = 0$$

よって $\{a_n\}$ は周期 6 の数列である。
よって $a_{10} = a_4 = -1$

e) 以下 $10 \leq n \leq 12$ とし

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 \equiv 3a_2 - 7a_1 \equiv 9 - 7 = 2$$

$$a_4 \equiv 3a_3 - 7a_2 \equiv 6 - 21 = -15$$

$$a_5 \equiv 3a_4 - 7a_3 \equiv -45 - 14 = -59$$

$$a_6 \equiv 3a_5 - 7a_4 \equiv -177 - (-105) = -72$$

$$a_7 \equiv 3a_6 - 7a_5 \equiv -216 - 413 = -629$$

$$a_8 \equiv 3a_7 - 7a_6 \equiv -1887 - 504 = -2391$$

$$a_9 \equiv 3a_8 - 7a_7 \equiv -7173 - (-3927) = -3246$$

$$a_{10} \equiv 3a_9 - 7a_8 \equiv -9738 - (-15654) = 5916$$

$$a_{11} \equiv 3a_{10} - 7a_9 \equiv 17748 - (-20706) = 38454$$

$$a_{12} \equiv 3a_{11} - 7a_{10} \equiv 115362 - 65496 = 49866$$

$$a_{13} \equiv 3a_{12} - 7a_{11} \equiv 149658 - 56832 = 92826$$

$$a_{14} \equiv 3a_{13} - 7a_{12} \equiv 278478 - 139722 = 138756$$

よって $\{a_n\}$ は周期 14 の数列である。

$$a_{12} = 49866$$

⑨ 公式を便利なように変換

d) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 7a_{n+1}$

$$= 3(3a_{n+1} - 7a_n) - 7a_{n+1}$$

$$= 2(a_{n+1} - 11a_n) + a_n$$

$\{a_n\}$ は整数列より

a_n と a_{n+3} は 2 で割ると余りが等しい

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3a_2 - 7a_1 = 2$ より

a_n は偶数 $\Leftrightarrow n$ は 3 の倍数

e) $10 = 2 \times 5$ より

a_n は 10 の倍数と 12 と 3

a_n は 2 の倍数かつ 5 の倍数と 3

a_n は 5 の倍数と 12 と 3

$\{a_n\} = 1, 3, 2, 15, \dots$ より

a_n は 4 の倍数と 12 と 3 と予想

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} - 2(a_{n+1})$$

$$= 2(3a_{n+1} - 7a_n) - 2(a_{n+1})$$

$$= 4(-3a_{n+1} - 9a_n) + a_n$$

$\{a_n\}$ は整数列より

a_n と a_{n+4} は 4 で割ると余りが等しい

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = -15$ より

a_n は 5 の倍数 $\Leftrightarrow n$ は 4 の倍数

$\therefore a_n$ は 10 の倍数と 12 と 3

$n = 3 \times 4 = 12$ の倍数と 12 と 3 とである。□

10.

$$\begin{aligned} d) a_n + b_n \sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^n \\ &= a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2 \\ &= a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$(b - 2ab)\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 - a$$

$$b - 2ab \neq 0 \text{ と } 73 \text{ と}$$

$$\sqrt{2} = \frac{a^2 + 2b^2 - a}{b - 2ab} \text{ (無理数)}$$

と矛盾

よ、ア

$$b = 2ab$$

$$2a \text{ と } a = a + 2b^2$$

$2b^2$ は偶数で、 a は奇数より

a は偶数である

$$\begin{cases} a = a + 2b^2 = k_1 d \dots ① & d \text{ は } a \text{ と } b \text{ の最大公約数} \\ b = 2ab = k_2 d \dots ② & k_1 \text{ と } k_2 \text{ は互いに素} \end{cases}$$

と仮定

a は偶数であるから、①より d は偶数

②より d は a ではない、 b の約数である

d が a の約数であるとき

①より d は b の約数であるから b の約数である

a と b は互いに素より $d = 1$

d が b の約数であるとき

②より $d = 1$

よ、 a と b は互いに素である。□

②) a_n と b_n の可約性

$$d | n = 1 \text{ と } 2$$

$$\sqrt{2} \text{ は無理数より } a_1 = a, b_1 = b \text{ と}$$

$$a_2 \text{ と } b_2 \text{ は互いに素} \rightarrow$$

$$d | n = k \text{ (} k = 1, 2, \dots \text{)} \text{ と } 2 \text{ の倍数と仮定して}$$

a_k と b_k の可約性

$$n = k + 1 \text{ のとき成り立つことを示す}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})^k \\ &= (a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2}) + (a_{k+1} + b_{k+1} \sqrt{2}) \sqrt{2} \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ は無理数である

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_{k+1} + 2b_k b_k \dots ③ \\ b_{k+1} = b_{k+1} + a_k b_k \dots ④ \end{cases}$$

③より a_{k+1} は奇数

④より b_{k+1} は偶数、 a_k は奇数、 b_k は偶数

a_n と b_n は互いに素である

a_n と b_n の互いに素

$$d | n = 1 \text{ と } 2$$

$$a_1 = a, b_1 = b \text{ より } a_1 \text{ と } b_1 \text{ は互いに素}$$

$$d | n = k \text{ (} k = 1, 2, \dots \text{)} \text{ と } 2 \text{ の倍数と仮定して}$$

a_k と b_k は互いに素

$$n = 2k \text{ のとき成り立つことを示す}$$

$$\begin{aligned} a_{2k} + b_{2k} \sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^{2k} \\ &= (a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{2})^k \\ &= a_{2k} + b_{2k} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{2k} = a_{2k} + 2b_{2k}^2 \\ b_{2k} = 2ab_{2k} \end{cases}$$

$$d | n = 2k \text{ と仮定して } a_{2k} \text{ と } b_{2k} \text{ は互いに素}$$

④より b_{2k} は偶数、 a_{2k} は奇数、 b_{2k} は偶数

a_{2k} と b_{2k} は互いに素である

また、 $\leftarrow$ 帰納法の帰納法

a_{k+1}, b_{k+1} は互いに素 $\rightarrow a_k, b_k$ は互いに素である

②証明

a_k, b_k は互いに素 $\rightarrow a_{k+1}, b_{k+1}$ は互いに素である

$$d(2k) \text{ は } 2 \text{ の倍数である}$$

と示せばよい

a_k, b_k の $d(2k)$ は公約数である

(*)より a_{k+1}, b_{k+1} は d の公約数である

以上から帰納法の帰納法より

すべての n に対して a_n と b_n は互いに素である。□