

1.2 無限等比数列

(1) 無限等比数列

数列 $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots$ を初項 a , 公比 r の無限等比数列といいます。初項 r , 公比 r の無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限について、次のことが成り立つ。

無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$$

$$|r| < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$r \geq -1 \text{ のとき } \text{振動 (極限はない)}$$

直感的に分かるが、一応証明をしておく。

(i) $r > 1$ のとき, $r = 1 + h$ ($h > 0$) とおくと,

$$(1 + h)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 h + {}_nC_2 h^2 + \dots + {}_nC_n h^n \geq 1 + nh$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$ であるから、追い出しの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h)^n = \infty \dots \textcircled{1}$$

(ii) $r = 1$ のときは明らか

(iii) $|r| < 1$ のとき

$r > 0$ のとき, $r = \frac{1}{s}$ とおくと, $s > 1$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s^n} = 0 \text{ (}\textcircled{1}\text{を利用)} \dots \textcircled{2}$$

$r = 0$ のときは明らか

$r < 0$ のとき, $r = -s$ とおくと, ($0 < s < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n s^n = 0 \text{ (}\textcircled{2}\text{を利用)}$$

(iv) $r \leq -1$ のとき

$r = -1$ のとき, $-1, 1, -1, 1, \dots$ となるから, 振動する。

$r < -1$ のとき, $r = -s$ とおくと, $s > 1, r^n = (-1)^n s^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = \infty$ であるが, 符号が交互に変わるので振動する。

例1

自然数 n について、 $a_n = \left(x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)^n$ とする。数列 $\{a_n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

(解説)

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき

$$-1 < x^2 + 2x + \frac{1}{2} \leq 1$$

$$x^2 + 2x + \frac{1}{2} > (x+1)^2 - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} \text{ より}$$

$$x^2 + 2x + \frac{1}{2} \leq 1$$

$$(x+1)^2 \leq \frac{3}{2} \quad \therefore \frac{-2-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$$

例2

(1) $a_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n}$ である数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^n + 4^n}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 4^{n+1}}{2^{2n+3} + 3^{n+2}}$ を求めよ。

(4) $a_n = \frac{5^n - 4^n}{3^n}$ である数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(解説)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = 3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = \frac{0 - 4}{0 + 1} = -4$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 4^{n+1}}{2^{2n+3} + 3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \cdot 3^n - 4 \cdot 4^n}{8 \cdot 4^n + 9 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{8 + 9 \left(\frac{3}{4}\right)^n} = -\frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 4^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n \right\} = \infty$$

例3

r を正の定数とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}}$ を求めよ.

(解説)

(i) $0 < r < 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{r}{3} \right)^{n-1} - 3}{\left(\frac{r}{3} \right)^n + \frac{1}{3}} = -9$$

(ii) $r = 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8 \cdot 3^{n-1}}{4 \cdot 3^{n-1}} = -2$$

(iii) $r > 3$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 9 \left(\frac{3}{r} \right)^{n-1}}{r + \left(\frac{3}{r} \right)^{n-1}} = \frac{1}{r}$$

例4

n が自然数で, $x \geq 0$ であるとき, 次の問いに答えよ.

(1) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} - 2x + 3}{x^n + 1}$ を求めよ.

(2) 上の極限値を $f(x)$ とするとき, $y = f(x)$ のグラフをかけ.

(解説)

(1) (i) $0 \leq x < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 0 \text{ より}$$

$$\text{与式} = -2x + 3$$

(ii) $x = 1$ のとき

$$\text{与式} = 1$$

(iii) $1 < x$ のとき

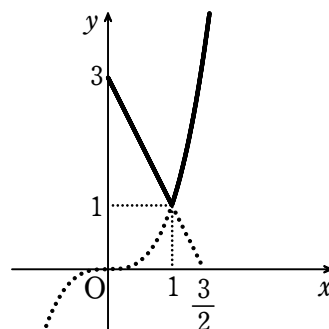
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \text{ より}$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 - \frac{2}{x^{n-1}} + \frac{3}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x^3$$

(2) (1)より

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x=1) \\ x^3 & (x>1) \end{cases}$$

$y=f(x)$ のグラフは右図



例5

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$ (n は正の整数) とおくとき, 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

解説

(i) $|x| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 0 \text{ より}$$

$$\text{与式} = 0$$

(ii) $x=1$ のとき, 与式 $= \frac{1}{2}$

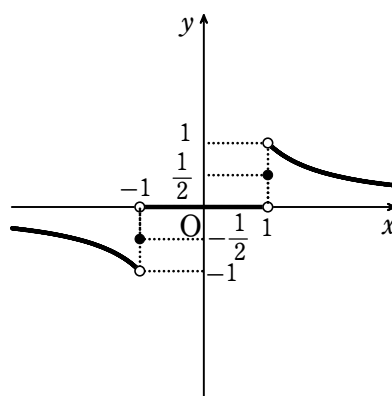
(iii) $x=-1$ のとき, 与式 $= -\frac{1}{2}$

(iv) $|x| > 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \text{ より}$$

$$\text{与式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = \frac{1}{x}$$

よって, $y=f(x)$ のグラフは右図



例6

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $|\tan \theta| < 1$ となる θ の範囲を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^n \theta - \cos^n \theta}{\sin^n \theta + \cos^n \theta}$ を求めよ。ただし、 $\theta \neq -\frac{\pi}{4}$ とする。

解説

(1) $|\tan \theta| < 1$ より

$$-1 < \tan \theta < 1 \quad \therefore -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$$

(2) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき、 $|\tan \theta| < 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\tan \theta = 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = 1$

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\tan \theta > 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \theta = \infty$

$-\frac{\pi}{2} < \theta \leq -\frac{\pi}{4}$ のとき、 $\tan \theta \leq -1$ より、振動して極限はない

(3) $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin^n \theta}{\cos^n \theta} - 1}{\frac{\sin^n \theta}{\cos^n \theta} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^n \theta - 1}{\tan^n \theta + 1} = -1$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、 $(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < -\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$(\text{与式}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\cos^n \theta}{\sin^n \theta}}{1 + \frac{\cos^n \theta}{\sin^n \theta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{\tan^n \theta}}{1 + \frac{1}{\tan^n \theta}} = 1$$

例7

数列 $\{a_n(x)\}$ は $a_n(x) = \frac{\sin^{2n+1} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$ ($0 \leq x \leq \pi$) で定められたものとする.

(1) この数列の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$ を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$ を $A(x)$ とおくととき, 関数 $y = A(x)$ のグラフを図示せよ.

(解説)

(1) (i) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi < x \leq \pi$ のとき

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n + 1} = 0$$

(ii) $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$ のとき

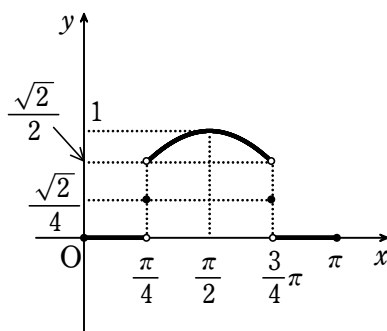
$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1 + \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(iii) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$ のとき

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} < 1 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{1 + \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n} = \sin x$$

$$(2) A(x) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \left(x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \\ \sin x & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi\right) \end{cases}$$

$y = A(x)$ のグラフは右図



例8

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

(2) $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{3n}) = \boxed{}$ である。

解説

(1) $0 < a \leq 1$ のとき

$$0 < a^n \leq 1$$

$$1 < 1 + a^n \leq 2 \quad \therefore 1 < (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから、はさみうちの原理より

$$(\text{与式}) = 1 \dots \textcircled{1}$$

$1 < a$ のとき

$$(1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \left[a^n \left\{ \left(\frac{1}{a} \right)^n + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{n}} = a \left\{ \left(\frac{1}{a} \right)^n + 1 \right\}^{\frac{1}{n}}$$

$0 < \frac{1}{a} < 1$ であるから、①を利用して、 $(\text{与式}) = a$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 1 & (0 < a \leq 1) \\ a & (1 < a) \end{cases}$$

$$(2) \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{3n}) = \frac{1}{n} \log a^{2n} (1 + a^n)$$

$$= \frac{1}{n} \log a^{2n} + \frac{1}{n} \log(1 + a^n)$$

$$= 2 \log a + \frac{1}{n} \log(1 + a^n)$$

$0 < a < 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 + a^n) = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^{2n} + a^{3n}) = 2 \log a$$

補1

関数 $f(x)$ ($x > 0$) を

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(7x+6)^n + (9x)^n}$$

により定める。「正の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 」ということなどから、

$0 < x \leq \boxed{}$ のときは $f(x) = \overset{1}{}x + \overset{2}{}$ であり、 x

$> \boxed{}$ のときは

$f(x) = \overset{3}{}x + \overset{4}{}$ であることがわかる。

解説説

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(7x+6)^n + (9x)^n} \quad (x > 0)$$

(i) $7x+6 < 9x$ すなわち $x > 3$ のとき

$$0 < \frac{7x+6}{9x} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+6}{9x} \right)^n = 0 \text{ より}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (9x) \sqrt[n]{\left(\frac{7x+6}{9x} \right)^n + 1} = 9x$$

(ii) $9x < 7x+6$ すなわち $0 < x < 3$ のとき

$$0 < \frac{9x}{7x+6} < 1 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9x}{7x+6} \right)^n = 0 \text{ より}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (7x+6) \sqrt[n]{1 + \left(\frac{9x}{7x+6} \right)^n} = 7x+6$$

(iii) $9x = 7x+6$ すなわち $x = 3$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2(27)^n} = 27 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 27$$

(i) ~ (iii) より

$$0 < x \leq 3 \text{ のとき, } f(x) = \overset{1}{7}x + \overset{2}{6}$$

$$x > 3 \text{ のとき, } f(x) = \overset{3}{9}x + \overset{4}{0}$$