2.2　絶対値を含む関数の積分

(1) 絶対値を含む関数の積分

絶対値を含む関数は，絶対値を外してから計算をすればよい。

既に学んだように，$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ は，

$a \leqq x \leqq b$ において $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積，

$\displaystyle\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ は，

$a \leqq x \leqq b$ において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積を表している。

例1

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^{10} \frac{|5-x|}{\sqrt{x-1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\,dx$

(解説)

(1) $$\int_2^{10} \frac{|5-x|}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int_2^5 \frac{5-x}{\sqrt{x-1}}\,dx+\int_5^{10} \frac{x-5}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$=\int_2^5 \frac{4-(x-1)}{\sqrt{x-1}}\,dx+\int_5^{10} \frac{(x-1)-4}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

$$=\int_2^5 \left\{4(x-1)^{-\frac{1}{2}}-(x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}dx+\int_5^{10} \left\{(x-1)^{\frac{1}{2}}-4(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$$

$$=\left[8\sqrt{x-1}-\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right]_2^5+\left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}-8\sqrt{x-1}\right]_5^{10}=8$$

(2) $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\log x)\,dx+\int_1^e \log x\,dx$$

$$=-\Big[x\log x-x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$

$$=\left(1-\frac{2}{e}\right)+1=2-\frac{2}{e}$$

(3) $\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$

よって

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\left[-2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-2\sqrt{2}(0-1)=2\sqrt{2}$$

別解

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sqrt{1+\cos x}}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx=-\int_0^{\pi}\frac{(1+\cos x)'}{\sqrt{1+\cos x}}dx$$

$$=-\left[2\sqrt{1+\cos x}\right]_0^{\pi}=2\sqrt{2}$$

例2

$x>0$ とするとき，関数 $f(x)=\int_0^1|x-t|e^t dt$ の値を最小にする x の値を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

解説

$$\int(x-t)e^t dt=x\int e^t dt-\int te^t dt$$

$$=xe^t-te^t+\int e^t dt$$

$=xe^t-te^t+e^t+C=(x-t+1)e^t+C$ (C は積分定数)

(ⅰ) $0<x\leqq 1$ のとき

$|x-t|=\begin{cases} x-t & (0\leqq t\leqq x) \\ -x+t & (x\leqq t\leqq 1) \end{cases}$ より

$$f(x)=\int_0^x(x-t)e^t dt+\int_x^1(-x+t)e^t dt$$

$$=\Big[(x-t+1)e^t\Big]_0^x-\Big[(x-t+1)e^t\Big]_x^1$$

$$=e^x-(x+1)-xe+e^x=2e^x-(e+1)x-1$$

$$f'(x)=2e^x-(e+1)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$e^x=\frac{e+1}{2} \qquad \therefore\ x=\log\frac{e+1}{2}$$

(ii) $x>1$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ において，$|x-t|=x-t$ であるから

$$f(x)=\int_0^1(x-t)e^t dt=\Big[(x-t+1)e^t\Big]_0^1$$

$$=xe-(x+1)=(e-1)x-1$$

$e-1>0$ より，$f(x)$ は単調増加

(i)，(ii)より

$f(x)$ の増減表は右図

x	0	$\cdots$	$\log\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	／	↘	最小	↗	$e-2$	↗

よって，$f(x)$ を最小にする

x の値は，$x=\log\dfrac{e+1}{2}$

例3

$\displaystyle\int_0^\pi|\sin x+\cos x|dx$ を求めよ。

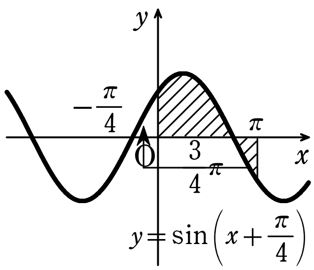
(解説)

$$\int_0^\pi|\sin x+\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^\pi\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$\displaystyle\int_0^\pi\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$ は $0\leqq x\leqq\pi$ において，

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の

面積に等しい



$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ において $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と x 軸

とで囲まれた部分と $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq 0$ において

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分は等しく，$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ は

$y=\sin x$ を x 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものであるから

$$\int_0^\pi\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

よって

　与式$=2\sqrt{2}$

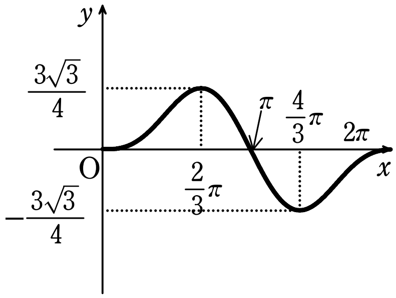
<table><tr><td>例4
(1)　$y=(1-\cos x)\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の極値を求め，グラフをかけ．
(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|(1-\cos x)\sin x|dx$ の値を求めよ．</td></tr></table>

(解説)

(1)　$y=(1-\cos x)\sin x=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

　$y'=\cos x-\cos 2x=2\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3}{2}x$

　$y'=0$ とすると，　$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$



x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき極大　極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき極小　極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(2) (1)より

$$\int_0^{2\pi}|(1-\cos x)\sin x|dx=2\int_0^{\pi}(1-\cos x)\sin x\,dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=2\left[-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}=4$$

注 絶対値の中身の正負の判定する際，本問では $1-\cos x\geqq 0$ であるから増減を調べるまでもないが，基本的には増減を調べるとよい。

例5

(1)　$f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおくとき，導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ を求めよ。

(2)　自然数 k に対して，$I_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx$，$J_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおくとき，(1) の結果を用いて I_k+J_k，I_k-J_k を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。

解説

(1) $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$ …①

$g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$ …②

(2) ①より

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f'(x)\,dx=-\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx-\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$f(k\pi)-f((k-1)\pi)=-(I_k-J_k)$$

$$\therefore I_k-J_k=-e^{-k\pi}\sin k\pi+e^{-(k-1)\pi}\sin(k-1)\pi=0$$

②より

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} g'(x)\,dx=-\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx\right)$$

$$g(k\pi)-g((k-1)\pi)=-(I_k+J_k)$$

$$\begin{aligned}\therefore I_k+J_k&=-e^{-k\pi}\cos k\pi+e^{-(k-1)\pi}\cos(k-1)\pi\\&=-(-1)^k e^{-k\pi}+(-1)^{k-1}e^{-k\pi+\pi}\\&=-(-e^{-\pi})^k(1+e^{\pi})\end{aligned}$$

(3) (2)より，　$I_k=-\dfrac{1}{2}(-e^{-\pi})^k(1+e^{\pi})$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(e^{-\pi})^k(1+e^{\pi})=\frac{\frac{1}{2}e^{-\pi}(1+e^{\pi})\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}$$

$$=\frac{(e^{\pi}+1)\{1-(e^{-\pi})^n\}}{2(e^{\pi}-1)}$$

よって，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$

例6
次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^4|\log x-1|dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\sin x-\frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\sin x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\times 2-1+\frac{\pi}{4}=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

注 $y=\cos x$ と $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる部分の面積と考えると，絶対値が外しやすい。

(2) $\displaystyle\int_1^4|\log x-1|dx=-\int_1^e(\log x-1)dx+\int_e^4(\log x-1)dx$

$=-\Big[x\log x-2x\Big]_1^e+\Big[x\log x-2x\Big]_e^4$

$=8\log 2+2e-10$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，
$y=\sin x$ と $y=\cos x$ とで囲まれる部分の面積である
$\sin x=\cos x$ として，　$\cos x\neq 0$ より

$\tan x=1$　　$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{4}$

よって，　$y=\sin x$ と $y=\cos x$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で交わる

与式$\displaystyle=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=\Big[\cos x+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\Big[\cos x+\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}-2$

例7

(1)　実数 $\alpha\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が $\sin\alpha=2\cos\alpha$ を満たすとき，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

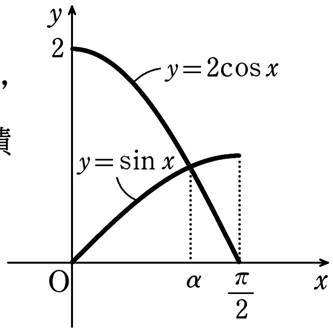
(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$ の値を求めよ。

解説

(1) $\cos\alpha\neq0$ より，　$\tan\alpha=2$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$y=\sin x$ と $y=2\cos x$ とで囲まれる部分の面積より



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-2\cos x|dx$$

$$=-\int_0^{\alpha}(\sin x-2\cos x)dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx$$

$$=-\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-2\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\cos\alpha+4\sin\alpha-3$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-3=2\sqrt{5}-3$$

例8

実数 t が $1\leqq t\leqq e$ の範囲を動くとき，$S(t)=\displaystyle\int_0^1|e^x-t|dx$ の最大値と最小値を求めよ。

解説

$e^x-t=0$ とすると，　$x=\log t$

$1\leqq t\leqq e$ より，　$0\leqq\log t\leqq1$

$S(t)$ は $0\leqq x\leqq1$ において $y=e^t$ と $y=t$ で囲まれる部分の面積より

$$S(t)=\int_0^{\log t}(t-e^x)dx+\int_{\log t}^{1}(e^x-t)dx$$

$=\Big[tx-e^x\Big]_0^{\log t}+\Big[e^x-tx\Big]_{\log t}^1$

$=t\log t-e^{\log t}-(0-1)+e-t-(e^{\log t}-t\log t)$

$=t\log t-t+1+e-t-t+t\log t$

$=2t\log t-3t+e+1$

$S'(t)=2\log t+2t\cdot\dfrac{1}{t}-3=2\log t-1$

$S'(t)=0$ とすると

$\log t=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\ t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

t	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$e-2$	↘	極小	↗	1

$1\leqq t\leqq e$ における $S(t)$ の増減表は右図

$t=\sqrt{e}$ で極小かつ最小

最小値 $S(\sqrt{e})=2\sqrt{e}\log\sqrt{e}-3\sqrt{e}+e+1=e-2\sqrt{e}+1$，

$e-2<1$ より $t=e$ のとき最大

最大値 1

注 はみ出し削り論法を利用すれば，$\log t=\dfrac{1}{2}$ すなわち，$t=\sqrt{e}$ で最小となることはすぐに分かる。

例9

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin t-\sin x|dt$ とする。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

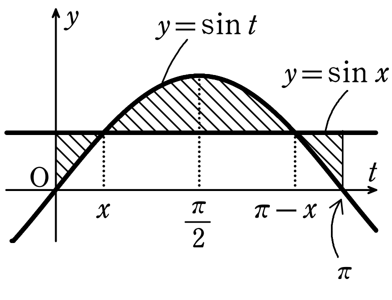
(3)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(解説)

(1) $f(0)=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin t|dt$

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，$\sin t\geqq0$ より

$f(0)=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=2$



(2) $f(x)$ は右図の斜線部の面積の和である

斜線部は $t=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから

$$f(x)=2\left\{\int_0^x(\sin x-\sin t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt\right\}$$

$$=2\left\{\Big[(\sin x)t+\cos t\Big]_0^x+\Big[-\cos t-(\sin x)t\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=2\left\{(x\sin x+\cos x-1)+\left(-\frac{\pi}{2}\sin x+\cos x+x\sin x\right)\right\}$$

$$=(4x-\pi)\sin x+4\cos x-2$$

(3) $f'(x)=4\sin x+(4x-\pi)\cos x-4\sin x=(4x-\pi)\cos x$

$f'(x)=0$ とすると， $x=\dfrac{\pi}{4}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は右図

$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小かつ最小

最小値 $2\sqrt{2}-2$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	

注 はみ出し削り論法を利用すれば， $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最小となることはすぐに分かる。

例10

$f(x)$ を常に $f'(x)>0$ となるような関数として，$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分 (原始関数) とする．また $0\leqq t\leqq 1$ とする．

(1)　$S(t)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-f(t)|dx$ を関数 $F(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ．

(2)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

解説

(1) $S(t)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-f(t)|dx$

$f'(x)>0$ であるから， $f(x)$ は単調増加

$0<t<1$ であるから， $f(0)<f(t)<f(1)$ より

$$S(t)=\int_0^t\{f(t)-f(x)\}dx+\int_t^1\{f(x)-f(t)\}dx$$

$$=\Big[f(t)x-F(x)\Big]_0^t+\Big[F(x)-f(t)x\Big]_t^1$$

$$=(2t-1)f(t)-2F(t)+F(0)+F(1)$$

(2) $S'(t)=2f(t)+(2t-1)f'(t)-2f(t)=(2t-1)f'(t)$

$f'(t)>0$ より，$S(t)$ の増減表は下図

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		↘	極小	↗	

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$S(t)$ は極小かつ最小値をとる

補1

$a>0$ とし，$S(a)=\int_a^{a+1}|\log x|dx$ とする．$S(a)$ を最小にする a の値とそのときの $S(a)$ の値を求めよ．

(解説)

$0<a\leqq 1$ のとき

$$S(a)=\int_a^1(-\log x)dx+\int_1^{a+1}\log x\,dx$$
$$=\Big[-x\log x+x\Big]_a^1+\Big[x\log x-x\Big]_1^{a+1}$$
$$=1+a\log a-a+(a+1)\log(a+1)-(a+1)+1$$
$$=a\log a+(a+1)\log(a+1)-2a+1$$

$1<a$ のとき

$$S(a)=\int_a^{a+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_a^{a+1}$$
$$=(a+1)\log(a+1)-(a+1)-a\log a+a$$
$$=(a+1)\log(a+1)-a\log a-1$$

$0<a\leqq 1$ のとき

$$S'(a)=\log a+1+\log(a+1)+1-2=\log a(a+1)$$

$S'(a)=0$ とすると

$$a(a+1)=1$$
$$a^2+a-1=0 \qquad \therefore\ a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$1<a$ のとき

$$S'(a)=\log(a+1)+1-\log a-1=\log\left(1+\frac{1}{a}\right)>\log 1=0$$

a	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$S(a)$		↘	極小	↗	$2\log 2-1$	↗

$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき極小かつ最小

最小値 $S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}$

補2

(1)　$0<x<\pi$ のとき，$\sin x-x\cos x>0$ を示せ。

(2)　定積分 $I=\int_0^{\pi}|\sin x-ax|dx$ $(0<a<1)$ を最小にする a の値を求めよ。

(解説)

(1) $f(x)=\sin x-x\cos x$ とおく。

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$0<x<\pi$ において，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調増加

$f(0)=0$ より，$f(x)>0$

よって，$0<x<\pi$ のとき，$\sin x-x\cos x>0$

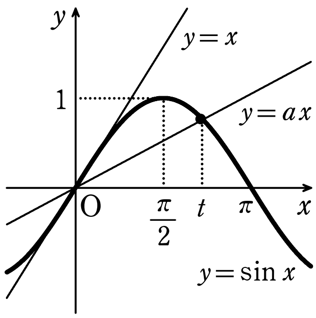
(2) $y=\sin x$ について，$y'=\cos x$

$x=0$ のとき，$y'=\cos 0=1$ より

$0<a<1$ のとき，$y=\sin x$ と $y=ax$ は

$0<x<\pi$ で共有点をもつ。

この共有点の x 座標を $t\,(0<t<\pi)$ とすると



$$\sin t=at \quad \therefore\ a=\frac{\sin t}{t}$$

このとき

$$I=\int_0^{\pi}|\sin x-ax|dx$$

$$=\int_0^{t}(\sin x-ax)dx+\int_t^{\pi}\{-(\sin x-ax)\}dx$$

$$=\left[-\cos x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^t+\left[\cos x+\frac{a}{2}x^2\right]_t^{\pi}$$

$$=-\cos t-\frac{a}{2}t^2+1-1+\frac{\pi^2}{2}a-\cos t-\frac{a}{2}t^2$$

$$=-2\cos t-at^2+\frac{\pi^2}{2}a$$

$$=-2\cos t-t\sin t+\frac{\pi^2\sin t}{2t}$$

$I=I(t)$ とおくと

$$I'(t)=2\sin t-\sin t-t\cos t+\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}$$

$$=(\sin t-t\cos t)\left(1-\frac{\pi^2}{2t^2}\right)$$

(1) より，$0<t<\pi$ において $\sin t-t\cos t>0$ であるから，
$I'(t)=0$ とすると

$$1-\frac{\pi^2}{2t^2}=0$$

$0<t<\pi$ より， $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

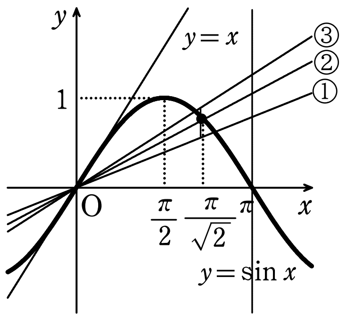
$0<t<\pi$ における $I(t)$ の増減表は右図

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	π
$I'(t)$		$-$	0	$+$	
$I(t)$		↘	極小	↗	

$I(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ のとき極小かつ最小値をとる
このときの a の値は

$$a=\frac{\sin t}{t}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

別解 はみ出し削り論法



図において，①と② (②と③)と $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ で
囲まれる部分の面積と
①と② (②と③)と $x=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}, x=\pi$ で囲まれる
部分の面積は等しい
$I=\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x-ax|dx$ は $0\leqq x\leqq\pi$ において
$y=\sin x$ と $y=ax$ とで囲まれる部分の面積に等しい
a を増加させて， $y=ax$ を①から③まで動かすとき，図より
①から②までは，面積の減少分＞面積の増加分となり
②から③までは，面積の減少分＜面積の増加分となり
②のとき， I が最小となることが分かる

このとき， $a=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}}{\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$

補3

t を実数とし，定積分 $I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-t\cos x|dx$ を考える。

(1)　$t\leqq 0$ のとき，$I(t)$ を求めよ。

(2)　$t>0$ とする。$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において $\sin x-t\cos x=0$ を満たす x を θ とするとき，$I(t)$ を θ で表せ。

(3)　t が実数全体を動くとき，$I(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

(解説)

(1) $t\leqq 0$ のとき，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において

$\sin x-t\cos x\geqq 0$

よって

$$I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t\cos x)dx$$

$$=\Big[-\cos x-t\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-t-(-1)=-t+1$$

(2) $I(t)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$y=\sin x$ と $y=t\sin x$ とで囲まれる部分の面積に等しいから

$$I(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-t\cos x|dx$$

$$=-\int_0^{\theta}(\sin x-t\cos x)dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t\cos x)dx$$

$$=-\Big[-\cos x-t\sin x\Big]_0^{\theta}+\Big[-\cos x-t\sin x\Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\{(-\cos\theta-t\sin\theta)-(-1)\}+\{-t-(-\cos\theta-t\sin\theta)\}$$

$$=2t\sin\theta+2\cos\theta-t-1$$

ここで，$\sin\theta-t\cos\theta=0$ より，$\cos\theta\neq 0$ であるから

$t=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ より

$I(t)=2\tan\theta\sin\theta+2\cos\theta-\tan\theta-1$

(3) (1)より，$t \leqq 0$ のとき，$I(t)=-t+1$ であるから， $I(t)$ は単調減少

(2)より，$t>0$ のとき，$J(\theta)=2\tan\theta\sin\theta+2\cos\theta-\tan\theta-1$ とする

$$J'(\theta)=\frac{2}{\cos^2\theta}\sin\theta+2\tan\theta\cos\theta-2\sin\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $J(\theta)$ の増減表は右図

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$J'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$J(\theta)$	1	$\searrow$	極小 $\sqrt{3}-1$	$\nearrow$	

$J(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ すなわち $t=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

のとき最小

最小値 $\sqrt{3}-1$

よって，t が実数全体を動くとき，

$I(t)$ を最小にする t の値は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，

最小値は $\sqrt{3}-1$