89 [茨城大]

自然数 n に対して，$a_n=2^n+3^n+1$ とおくとき，

(1) $a_{n+6}-a_n$ は7で割り切れることを示せ．

(2) n が6の倍数のとき，a_n は7で割り切れないことを示せ．

(3) a_n が7で割り切れるための n の条件を求めよ．

(1) $a_{n+6}-a_n=(2^{n+6}+3^{n+6}+1)-(2^n+3^n+1)$

$=63\cdot 2^n+728\cdot 3^n$

$=7(9\cdot 2^n+104\cdot 3^n)$ □

(2) $n=6$のとき

$a_6=2^6+3^6+1$

$=64+729+1$

$=794=7\cdot 113+3$

より7で割り切れない

(1)より a_{n+6} と a_n を7で割った余りは等しいから

$a_{12}, a_{18}, \cdots a_{6m}$ を7で割った余りは3であり

題意は示された □

(3) $a_1=6$, $a_2=14$, $a_3=36$, $a_4=98$, $a_5=276$, $a_6=7\cdot 113+3$

$=7\cdot 2$　　　$=7\cdot 14$

a_nが7で割り切れるのは，(1)より

$n=6k-4, 6k-2$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき

91 [2011 岡山大]

数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{ が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_{10} を求めよ。

(2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(3) a_n を3で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=2$, $a_5=3$, $a_6=6$, $a_7=7$, $a_8=14$, $a_9=15$, $a_{10}=30$

(2) (i) nが奇数のとき

$\overset{奇}{a_{n+4}}=a_{n+3}+1=2a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2a_{n+1}+3=4a_n+3$

(ii) nが偶数のとき

$\overset{偶}{a_{n+4}}=2a_{n+3}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2=4a_{n+1}+6=4(a_n+1)+1=4a_n+6$

(3) (2)より

nが奇数のとき $a_{n+4}-a_n=3(a_n+1)$

偶数　　$a_{n+4}-a_n=3(a_n+2)$ であるから

$a_{n+4}-a_n$は3の倍数である

すなわち a_{n+4}とa_nを3で割った余りは等しい

$a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$, $a_4=2$

a_nを3で割った余りは

$n=4k-3, 4k-2$ $(k=1, 2, \cdots)$のとき　0

$n=4k-1$　　〃　1

$n=4k$　　〃　2

90 [2005 専修大]

一般項が $a_n=10^{2n}-1$ で表される数列について

(1) a_1 および a_5 を求めよ。

(2) すべての自然数 k について，$a_{k+1}-a_k$ が11で割り切れることを示せ。

(3) すべての自然数 n について，a_n は11で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

92 [2011 首都大学東京]

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする。

$$\begin{cases} a_1=4,\ b_1=3 \\ a_{n+1}=4a_n-3b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

(1) a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4 を求めよ。

(2) $a_{n+4}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$, $b_{n+4}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ はともに5の倍数であることを証明せよ。

(3) a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ も b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ も5の倍数ではないことを証明せよ。

1) $a_2=7$, $b_2=24$, $a_3=-44$, $b_3=117$, $a_4=-527$, $b_4=396$, …

2)
$$\begin{aligned} a_{n+4}-a_n &= 4a_{n+3}-3b_{n+3}-a_n \\ &= 4(4a_{n+2}-3b_{n+2})-3(3a_{n+2}+4b_{n+2})-a_n \\ &= 7a_{n+2}-24b_{n+2}-a_n \\ &= 7(4a_{n+1}-3b_{n+1})-24(3a_{n+1}+4b_{n+1})-a_n \\ &= -44a_{n+1}-117b_{n+1}-a_n \\ &= -44(4a_n-3b_n)-117(3a_n+4b_n)-a_n \\ &= -528a_n-600b_n\ ? \end{aligned}$$

i) $n=1$ のとき

$a_5-a_1=-9116-4=-9120$, $b_5-b_1=-230$ より成り立つ

ii) $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_{k+4}-a_k=5N_1$, $b_{k+4}-a_k=5N_2$ (N_1, N_2 は整数)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned} a_{k+5}-a_{k+1} &= 4a_{k+4}-3b_{k+4}-(4a_k-3b_k) \\ &= 4(a_{k+4}-a_k)-3(b_{k+4}-b_k) \\ &= 5(4N_1-3N_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+5}-b_{k+1} &= 3a_{k+4}+4b_{k+4}-(3a_k+4b_k) \\ &= 3(a_{k+4}-a_k)+4(b_{k+4}-b_k) \\ &= 5(3N_1+4N_2) \end{aligned}$$

よって成り立つ

i), ii) から数学的帰納法より

題意は示された

3) 2) より a_{n+5} と a_n, b_{n+5} と b_n を5で割った余りは等しい

$a_1=4$, $a_2=7$, $a_3=-44$, $a_4=-527$, $a_5=-9116$

$b_1=3$, $b_2=24$, $b_3=117$, $b_4=396$, $b_5=-227$

はすべて5の倍数ではないので

題意は示された ■

93 [2009 横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を $a_1=3$, $b_1=8$, $c_1=24$ と関係式

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+b_n \\ b_{n+1}=4b_n+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ c_{n+1}=8c_n \end{cases}$$

で定める。

(1) b_n を n の式で表せ。

(2) $a_{n+3}-a_n$ は7で割り切れることを示し，a_n が7で割り切れるための n の条件を求めよ。

94 [岡山大]

数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=1, a_{n+1}=(a_n)^2+1\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定める.

(1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ.

(2) 自然数 m に対して，a_{3m} は5で割り切れることを証明せよ.

1) $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=26$, $a_5=677$, $a_6=458330$

2) i) $m=1$ のとき

$a_3=5$ より成り立つ

ii) $m=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_{3k}=5N$ (N は整数)

$m=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned} a_{3k+3} &= (a_{3k+2})^2+1 \\ &= (a_{3k+1}^2+1)^2+1 \\ &= ((a_{3k}+1)^2+1)^2+1 \\ &= (a_{3k}^2+2a_{3k}+2)^2+1 \\ &= (5N'+2)^2+1 \quad (N' \text{は整数}) \\ &= 5(5N'^2+4N'+1) \end{aligned}$$

よって成り立つ

i), ii) から数学的帰納法より

題意は示された ■

95 [2018 大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3{a_n}^2+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して，a_{3n} は5で割り切れることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}-1$ は5で割り切れることを示せ。

96 [1999 上智大]

漸化式 $a_1=4$, $a_{n+1}=3{a_n}^2+4a_n+3\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定まる整数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) a_n-4 が7で割り切れることを証明せよ.

(2) ${a_n}^2+a_n+1$ が 7^n で割り切れることを証明せよ.

(3) 正整数 p について，${a_n}^{3^p}$ を 7^n で割った余りを求めよ.

97 [2010 県立広島大]

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=7a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。

(1) a_{n+3} を a_n, a_{n+1} で表せ。

(2) a_{3n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が偶数であることを数学的帰納法で証明せよ。

(3) a_{4n} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が3の倍数となることを示せ。

(1) $a_{n+3}=7a_{n+2}+a_{n+1}$

$=7(7a_{n+1}+a_n)+a_{n+1}$

$=50a_{n+1}+7a_n$ //

(2) (i) $n=1$ のとき　　$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=8\ a_4=$

$a_3=8$ より成り立つ

(ii) $n=k\ (k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_{3k}=2N_1$ (N_1:整数)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{3k+3}=50a_{3k+1}+7a_{3k}$

$=2(25a_{3k+1}+7N_1)$　(a_{3k+1} は帰納的に整数)

よって成り立つ

(i),(ii)から数学的帰納法より

証明された□

(3) (i) $n=1$ のとき

$a_4=57$ より成り立つ

(ii) $n=l\ (l=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_{4l}=3N_2$ (N_2:整数)

$n=l+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{4l+4}=50a_{4l+2}+7a_{4l+1}$

$=357a_{4l+1}+50a_{4l}$

$=3(119a_{4l+1}+50N_2)$

よって成り立つ

(i),(ii)から数学的帰納法より

証明された□

99 [1993 東京大]

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ で定める． a_n が偶数となる n を決定せよ．

$a_3=2,\ a_4=-15,\ a_5=-59,\ a_6=-72,\ \cdots$　帰納的に a_n は整数である

$a_{n+3}-a_n$ が偶数であることを示す

(i) $n=1$ のとき

$a_4-a_1=-15-1=-16$ より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定して
$(k=1,2,\cdots)$

$a_{k+3}-a_k=2N$ (N:整数)

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{k+4}-a_{k+1}=3a_{k+3}-7a_{k+2}-a_{k+1}$

$=3a_{k+3}-7(3a_{k+1}-7a_k)-a_{k+1}$

$=3a_{k+3}-22a_{k+1}+49a_k$

$=3(a_{k+3}-a_k)-2(11a_{k+1}-26a_k)$

$=2(3N-11a_{k+1}+26a_k)$

よって成り立つ

(i),(ii) から数学的帰納法より

$a_{n+3}-a_n$ は偶数であるから

a_{n+3} と a_n の偶奇は一致する

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=2$ より

a_n が偶数となる n は n が3の倍数のときは.

[別解] 合同式

以下, 2を法として考える

$a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ より

$\therefore a_{n+2}\equiv 3a_{n+1}-7a_n$

$\therefore a_{n+2}\equiv a_{n+1}-a_n$

$a_1\equiv 1.\ a_2\equiv 1$

$a_3\equiv a_2-a_1\equiv 1-1=0$

$a_4\equiv a_3-a_2\equiv 1-0=1$

$a_5\equiv a_4-a_3\equiv 1-0=1$

$a_6\equiv a_5-a_4\equiv 1-1=0$

$\vdots$

あとはこのくり返しであるから

a_n が偶数となる n は n が3の倍数のとき

98 [大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ で定める.

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ を示せ.

(3) 任意の自然数 n に対して， a_n は整数であり， a_{4n} は3の倍数であることを示せ.

100 [熊本大]

$a_1=a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について,

(1) $n=3, 4, \cdots\cdots, 9$ に対して a_n の値を求めよ.

(2) n が3の倍数ならば a_n は偶数であり， n が3の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ.