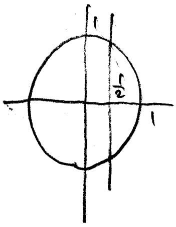
発展問題演習 6. 三角関数

$\boxed{1}$

(1) $\cos(\pi\cos\alpha)=\frac{1}{2}$ …①

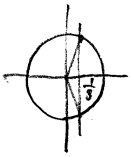
$t=\pi\cos\alpha$ とおくと $-\pi\leqq t\leqq\pi$



$\cos t=\frac{1}{2}$ ∴ $t=\pm\frac{\pi}{3}$

$t=\frac{\pi}{3}$ のとき

$\pi\cos\alpha=\frac{\pi}{3}$



∴ $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

これを満たすαは 2個

同様に$t=-\frac{\pi}{3}$のときも2個

よって①を満たすαは4個

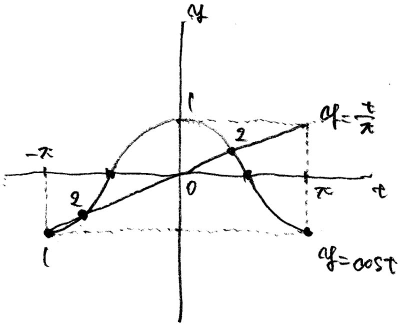
(2) $\cos(\pi\cos\alpha)=\cos\alpha$

$t=\pi\cos\alpha$ とおくと $-\pi\leqq t\leqq\pi$

$\cos t=\frac{t}{\pi}$ …①

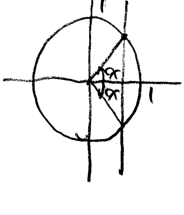
①を満たすtは

$y=\cos t$ と $y=\frac{t}{\pi}$ のt座標に等しい



$t=\pi\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{t}{\pi}$



$-\pi<t<\pi$のとき 1つのtに対し 2つのα

$t=\pm\pi$ 〃 1つのtに対し 1つのα

が対応するから

求めるαの個数は 5個

<point>

1. 三角関数のグラフ

$\boxed{2}$

(1) $\cos(m+n)^\circ=\cos m^\circ\cos n^\circ-\sin m^\circ\sin n^\circ$

有理数の和や積は有理数であるから

有理数である

$\sin(m+n)^\circ$も同様にして有理数である

(2) $\cos n^\circ$と$\sin n^\circ$がともに有理数であると仮定する

nは60の約数より

$kn=60$

となる自然数kが存在する

$\sin kn^\circ=\sin\{n^\circ+(k-1)n^\circ\}$

とすると帰納的に$\sin kn^\circ$は有理数であるが

(1)より $\sin kn^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (無理数)となり矛盾

よって$\cos n^\circ$と$\sin n^\circ$の少なくとも一方は無理数である

<point>

1. sin, cos の加法定理

$\boxed{3}$

$q=1$とすると

$\tan\beta=1$ より $\beta=\frac{\pi}{4}+n\pi$ (n: 整数)

このとき

$\tan(\alpha+2\beta)=\tan(\alpha+\frac{\pi}{2})$

$=-\frac{1}{\tan\alpha}$

$=-p=2$ ∴ $p=-2$

となり不合理

よって$q\geqq 2$

このとき

$\tan(\alpha+2\beta)=2$

$$\frac{\tan\alpha+\tan2\beta}{1-\tan\alpha\tan2\beta}=2$$

$\tan\alpha=\frac{1}{p}$, $\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{2q}{q^2-1}$

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\left(1-\frac{2q}{p(q^2-1)}\right)$$

$q^2-1+2pq=2p(q^2-1)-4q$

$2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$

$\therefore p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$

$q\geqq 2$で $q^2+4q-1,\ 2(q^2-q-1)>0$かつ
pは正の整数より

$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1)$

$q^2-6q-1\leqq 0$

$\therefore 3-\sqrt{10}\leqq q\leqq 3+\sqrt{10}$

$q\geqq 2$より $q=2,3,4,5,6$であることが必要

$q=2$のとき $p=\dfrac{7}{2}$ ×

$q=3$ 〃 $p=\dfrac{20}{10}=2$ ○

$q=4$ 〃 $p=\dfrac{31}{22}$ ×

$q=5$ 〃 $p=\dfrac{44}{38}$ ×

$q=6$ 〃 $p=\dfrac{59}{58}$ ×

よって

$(p,q)=(2,3)$

<point>

1. tanの加法定理

$\boxed{4}$

(1) $f_0(x)=1,\ f_1(x)=x$

$f_2(x)=2xf_1(x)-f_0(x)=2x^2-1$

$f_3(x)=2xf_2(x)-f_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$

$f_4(x)=2xf_3(x)-f_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$

$f_5(x)=2xf_4(x)-f_3(x)=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)$

$=16x^5-20x^3+5x$ //

$f_5(x)=0$ より

$16x^5-20x^3+5x=0$

$x(16x^4-20x^2+5)=0$

$\therefore x=0,\ 16x^4-20x^2+5=0$

$16x^4-20x^2+5=0$において

$t=x^2$とおくと $t\geqq 0$

$16t^2-20t+5=0$

$t=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}$

$x^2=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}$ $\quad\therefore x=\pm\dfrac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$

よって

$x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ //

(2) i) $n=1,2$のとき

$f_1(\cos\theta)=\cos\theta$

$f_2(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$ より成り立つ

ii) $n=k-1,\ k\ (k=1,2,\cdots)$のとき成り立つと仮定して
$n=k+1$のとき成り立つことを示す

$f_{k+1}(\cos\theta)=2\cos\theta\cdot\cos k\theta-\cos(k-1)\theta$

$\cos\theta\cdot\cos k\theta=\dfrac{1}{2}\{\cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta\}$より

$=\cos(k+1)\theta$

よって成り立つ

i), ii)から数学的帰納法より
題意は示された //

(3) $f_5(\cos\frac{\pi}{10}) = \cos 5\cdot\frac{\pi}{10} = 0$ より

$\cos\frac{\pi}{10}$ は $f_5(x)=0$ の解の1つである

また $\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{4}$ より

$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ 〃

(4) $y = f_n(x)$ ($\theta \neq k\pi$ (k:整数))

$-1<x<1$ より $x=\cos\theta$ とおくと

$= f_n(\cos\theta) = \cos n\theta$

$y' = -n\sin n\theta$

$y' = 0$ とすると

$\sin n\theta = 0$ $n\theta = l\pi$ (l: 自然数)

∴ $\theta = \frac{l}{n}\pi$

θ	0		$\frac{\pi}{n}$		$\frac{2\pi}{n}$		$\frac{3\pi}{n}$		…
y'		−	0	+	0	−	0	+	…
y		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	…

$x = \cos\frac{2m}{n}\pi$ のとき極大で 極大値は 1
(m: 整数)

<point>

1. チェビシェフ多項式

[5].

(1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ より

$t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$

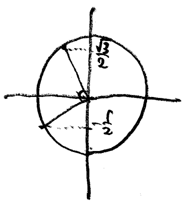
$= 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$

∴ $2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = t^2 - 1$

よって

$f(x) = \left|(t^2-1)+t-\frac{5}{4}\right|$

$= \left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$ 〃



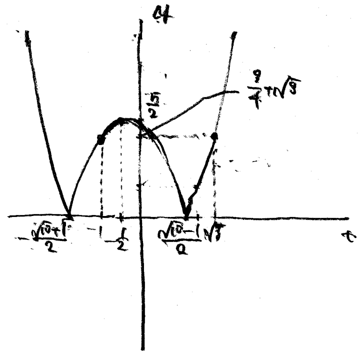
(2) $t = 2\sin(x+120°)$

$0 \leq x \leq 90°$ より

$-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ 〃

(3) $g(t) = \left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$ ($-1 \leq t \leq \sqrt{3}$) とおくと

$= \left|(t+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2}\right|$



よって

$0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$

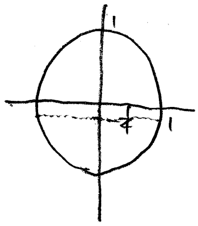
$t = -\frac{1}{2}$ のとき最大値をとる

このとき

$2\sin(x+120°) = -\frac{1}{2}$

∴ $\sin(x+120°) = -\frac{1}{4}$

$120° \leq x+120 \leq 210°$



1.73

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 = 8-4\sqrt{3} > 1$

$\sin 195° = -\sin 15°$

$= -\sin(45°-30°) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} < -\frac{1}{4}$ より

$180° < x+120° < 195°$

∴ $60° < x < 75°$ 〃

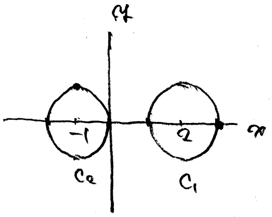
<point>

1. 三角関数の合成

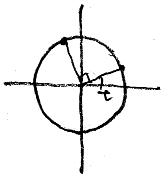
6

(1) P $\begin{cases} x=\cos\theta+2 \\ y=\sin\theta \end{cases}$

Q $\begin{cases} x=\cos(\theta+\frac{\pi}{2})-1 \\ y=\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$



∴ $\begin{cases} x=-\sin\theta-1 \\ y=\cos\theta \end{cases}$



とおける.

$M\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{2},\ \frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき $M(0,\ \frac{1}{2})$〃

(2) $PQ^2=(\sin\theta+\cos\theta+3)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$ $(0\leqq\theta<2\pi)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^2+6(\sin\theta+\cos\theta)+9$
$+(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=6(\sin\theta+\cos\theta)+11$

$=6\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+11$

(3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき 最大で 最大値 $\sqrt{11+2\sqrt{18}}=3+\sqrt{2}$

$\theta=\frac{7\pi}{4}$ 〃 〃 $3-\sqrt{2}$〃

(4) $M\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta+1}{2},\ \frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)$

(5) $=\left(\frac{\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})+1}{2},\ \frac{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}{2}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\right)$

よってMは$(1,\ \frac{1}{2})$をスタートして

円$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2}$を反時計回りに1周する〃

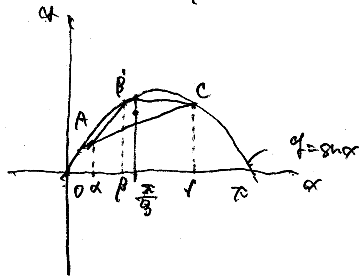
7

相加相乗平均より

$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\geqq\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$

∴ $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqq\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3$

等号成立は $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ のとき



$A(\alpha,\sin\alpha)$, $B(\beta,\sin\beta)$, $C(\gamma,\sin\gamma)$とすると

△ABCの重心Gは

$G\left(\underbrace{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}_{=\frac{\pi}{3}},\ \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ で $y=\sin x$ は上に凸であるから

$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\leqq\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

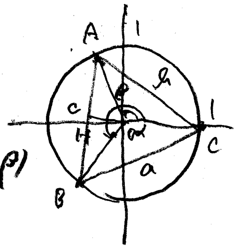
よって

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\leqq\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ のとき等号成立し

$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{8}$〃

$\boxed{8}$



1) $c^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= 2\{1 - \cos(\underbrace{\beta - \alpha}_{2\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}})\}$

$= 2\{1 - (2\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2} - 1)\}$

$= 4 - 4\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2}$ //

2) $a^2 = (\cos\beta - 1)^2 + \sin^2\beta$

$= 2 - 2\cos\beta$

$b^2 = 2 - 2\cos\alpha$ より

$a^2 + b^2 + c^2 = 8 - 4\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2} - 2(\cos\alpha + \cos\beta)$

$= 8 - 4\cos^2\frac{\beta-\alpha}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$= 8 - 4\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$= 8 - 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ //

3) $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ のとき

$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2} = 0$ or $\cos\frac{\beta}{2} = 0$ or $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$

$\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ のとき $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ $\therefore \alpha = 180^\circ$

よって△ABCはACを斜辺とする直角三角形

$\cos\frac{\beta}{2} = 0$ のとき BC 〃

$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = 0$ のとき $\frac{\beta-\alpha}{2} = 90^\circ$ $\therefore \beta - \alpha = 180^\circ$

AB 〃

よって題意は示された //

<point>

1. 和積公式・積和公式