

高3理系数学 標準問題演習 19.複素数平面(3)

①[(1) 2003 芝浦工業大 (2) 2004 日本女子大]

- (1) 複素数 z が $|z+3-4i|=2$ を満たすとき、 $|z|$ の最大値と最小値を求めよ。
(2) 複素数 z が $|z-1|=|z+i|$, $2|z-i|=|z+2i|$ をともに満たすとき、 z の値を求めよ。

②[I. 2019 広島大 III. 2000 山形大]

I. 複素数 α, β, γ が表す複素数平面上の点を、それぞれ、A, B, C とし、複素数平面の原点を O で表す。ただし、 $A \neq B$, $A \neq O$ とする。

- (1) 方程式 $\frac{z}{\alpha} + \frac{\bar{z}}{\alpha} = 1$ を満たす複素数 z が表す点の複素数平面上の軌跡は、線分 OA の垂直二等分線であることを示せ。
(2) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする。複素数平面上において、直線 AB 上の点を表す複素数 z は、方程式 $z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta$ を満たすことを示せ。
(3) $|\alpha|=|\beta|=1$ とする。複素数平面上において、点 C を通り直線 AB に垂直な直線上の点を表す複素数 z は、方程式 $z - \alpha\beta\bar{z} = \gamma - \alpha\beta\bar{\gamma}$ を満たすことを示せ。

II. 等式 $(1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0$ が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

III. 複素数平面において、三角形の頂点 O, A, B を表す複素数をそれぞれ $0, \alpha, \beta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 OA の垂直二等分線上の点を表す複素数 z は、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} - \alpha\bar{\alpha} = 0$ を満たすことを示せ。
(2) $\triangle OAB$ の外心を表す複素数を $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ を用いて表せ。
(3) $\triangle OAB$ の外心を表す複素数が $\alpha + \beta$ となるときの $\frac{\beta}{\alpha}$ の値を求めよ。

③[I. 図書館情報大 II. 東京水産大 III. 群馬大 IV. 近畿大]

- I. (1) 複素数平面上で $z=0$ を通り、中心が α の円の方程式は $z\bar{z} = \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}z$ で与えられることを示せ。ただし、 $\bar{z}$ は z に共役な複素数である。
(2) 2点 $z=0, 1$ を通る円の中心 α はどのような条件を満たすか。 α についての式を示し、図形的な意味を述べよ。
(3) 3点 $z=0, 1, \beta$ を通る円の中心 α 、および、その円の方程式を求めよ。ただし、 β は実数ではないとする。

高3理系数学 標準問題演習 19.複素数平面(3)

II. (1) 方程式 $z\overline{z} - iz + i\overline{z} - 3 = 0$ を満足する z は複素数平面上で円周を作ることができることを証明せよ.

(2) この円の中心と半径とを求めよ.

III. (1) 複素数平面上で式 $z\overline{z} + (2+i)z + (2-i)\overline{z} - 4 = 0$ を満たす複素数 z はどのような図形を描くか.

(2) 式 $(2-i)z + (2+i)\overline{z} = 2k$ と (1) の式をともに満たす複素数 α, β で, $|\alpha - \beta| = 4$ を満たすものがあるとき, 実数 k の値を求めよ.

IV. 2つの式 $|z - 2i| \leq 2, |z - 2i| \geq |z|$ を同時に満たす複素数平面上の点 z の存在する範囲を図示し, かつその面積を求めよ.

4 [I. 2000 熊本大 II. 2022 佐賀大]

I. 0 でない複素数 z に対して, $w = z + \frac{1}{z}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

(1) w が実数となるための z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ.

(2) w が実数で $1 \leq w \leq \frac{10}{3}$ を満たすとき, z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ.

II. 複素数 z について, $1, z, z^2$ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする.

(1) 点 A, B, C が正三角形の3つの頂点となる z をすべて求めよ.

(2) 点 A, B, C が直角三角形の3つの頂点となるための z に関する条件を求めよ. また, この条件を満たす点 z 全体を図示せよ.

5 [(1) 2014 星薬科大 (2) 1999 早稲田大]

(1) 3つの複素数 α, z, w は $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$ で, $w = \alpha z$ を満たしている. z が複素数平面上で $1 - \sqrt{3}i$ を表す点を中心とする半径1の円上を動くとき, w はどのような図形を描くか.

(2) 複素数 z が $|z - 1| = 2$ を満たすとき, 複素数 $w = iz + 3$ で表される点 $P(w)$ は, どのような図形を描くか.

6

複素数平面上で点 $P(z)$ が原点と 2 点 $A(1)$, $B(i)$ を頂点とする三角形の周上を動くとき, $w = z^2$ を満たす点 $Q(w)$ が描く図形を図示せよ.

7

[2017 東京大 2019 東京慈恵会医科大]

I. 複素数平面上の原点以外の点 z に対して, $w = \frac{1}{z}$ とする.

- (1) α を 0 でない複素数とし, 点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする. 点 z が直線 L 上を動くとき, 点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる. この円の中心と半径を求めよ.
- (2) 1 の 3 乗根のうち, 虚部が正であるものを β とする. 点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め, 複素数平面上に図示せよ.

II. 方程式 $x^3 + 1 = 0$ の解のうち, 虚部が正であるものを α とする. 複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(-1)$, $C(\overline{\alpha})$ を頂点とする $\triangle ABC$ を考える. $\triangle ABC$ の周上の点 $P(z)$ に対して, 原点 O を端点とし $P(z)$ を通る半直線上に $|w| = \frac{1}{|z|}$ を満たす点 $Q(w)$ をとるとき, 次の問いに答えよ. ただし, 複素数 γ に共役な複素数を $\overline{\gamma}$ で表し, 複素数平面上で複素数 γ を表す点 G を $G(\gamma)$ と書く.

- (1) $w = \frac{1}{z}$ となることを示せ.
- (2) $P(z)$ が $\triangle ABC$ の周上を動くとき, $Q(w)$ が描く図形によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

8

[2000 名古屋市立大]

2 つの複素数 z と w との間に, $w = \frac{z+i}{z+1}$ なる関係がある. ただし, $z+1 \neq 0$, i は虚数単位とする.

- (1) z が複素数平面上の虚軸を動くとき, w の軌跡を求め, 図示せよ.
- (2) z が複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求め, 図示せよ.

9 [新潟大]

0 でない複素数 z に対して, $w = z + \frac{2}{z}$ とおく. z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とし,

w の実部を u , 虚部を v とする. このとき,

(1) u, v をそれぞれ r と θ で表せ.

(2) 複素数平面上で, z が原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき, 点 w の描く図形を図示せよ.

(3) 複素数平面上で, z が $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ と $\sqrt{3} + i$ を結ぶ線分上を動くとき, 点 w が描く図形を図示せよ.