

2.6 定積分と無限級数

(1) 定積分と無限級数

定積分は、無限級数の収束、発散を調べるのに利用できる。

例1

(1) $k > 0$ のとき、 $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ を示せ。

(2) $\log(n+1) \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ を示せ。

(3) 級数 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ の収束、発散を調べ、収束するときは和を求めよ。

解説

(1) $k \leq x \leq k+1$ のとき、 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ より

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}$$

(2) (1)より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

$$\therefore \log(n+1) \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(3) (2)より

$$\log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = \infty$ であるから、追い出しの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$$

よって、級数 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ は正の無限大に発散する

例2

n が自然数のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

解説

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1$ 、 $2 - \frac{1}{n} = 2 - 1 = 1$ より成り立つ

$n \geq 2$ のとき、

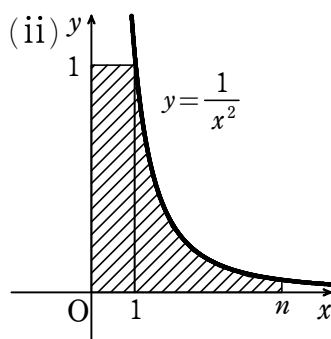
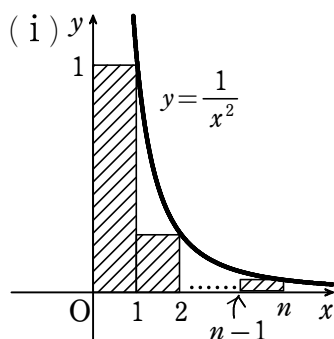
①の左辺は、下図(i)において、斜線部の長方形の面積の和に等しい
また、下図(ii)の斜線部分の面積は

$$1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$$

より

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

以上より、すべての自然数 n について、①は成り立つ



注 本問の結果より、 $\frac{1}{k^2} > 0$ と合わせて、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ は 0 から 2 の間のある値に収束することが分かる。 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ の極限值を求める問題をバーゼル問題といい、実際、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることが知られてる。

例3

自然数 n に対して,

$$2\sqrt{n+1}-2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$$

が成り立つことを示せ。

(解説)

自然数 k に対して, $k \leq x \leq k+1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$n \geq 2$ のとき, $k=1, 2, \dots$ として辺々を足し合わせて

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^n \\ &= 2\sqrt{n} - 2 \end{aligned}$$

①の左側の不等式より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

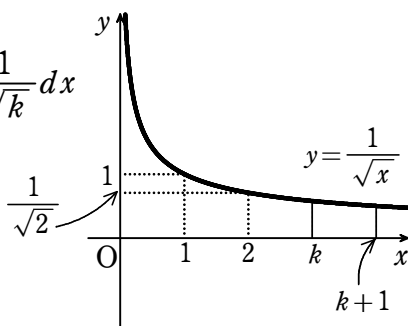
また, ①において $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ とすると

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore 2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

よって, 与えられた不等式は成り立つ

【注】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{n+1} - 2) = \infty$ より, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$ となることが分かる。



発散するので，あるところで止めて評価するという問題がよく出題される。

例4

k は正の整数とする。定積分 $I_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ について，次の問いに答えよ。

- (1) $S_n = \sum_{k=1}^n I_k$ とする。 S_1, S_2, S_3 を求めよ。
- (2) 不等式 $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$ の整数部分を求めよ。

解説

$$(1) I_k = \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_k^{k+1} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

よって

$$S_1 = I_1 = 2(\sqrt{2} - 1),$$

$$S_2 = I_1 + I_2 = 2(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2(\sqrt{3} - 1),$$

$$S_3 = S_2 + I_3 = 2(\sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3}) = 2$$

(2) $k \leq x \leq k+1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{k}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k+1}} < I_k < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$(3) a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} \text{ とおく}$$

$k=1, 2, 3, \dots, 99$ として，辺々を加えて

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}} < \sum_{k=1}^{99} I_k < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}}$$

$$a - 1 < \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < a - \frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^{100} = 2(\sqrt{100} - \sqrt{1}) = 18 \text{ より}$$

$$18 + \frac{1}{10} < a < 19$$

よって、求める a の整数部分は 18

例5

次の問いに答えよ。ただし、 x は実数、 n は自然数とする。

(1) 和 $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。

(3) 不等式 $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}$ を示せ。

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ を求めよ。

解説

(1) 和 $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ は

初項 1, 公比 $-x^2$, 項数 n の等比数列の和であるから、 $-x^2 \neq 1$ より

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} \dots \textcircled{1}$$

(2) $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

(3) $0 \leq x \leq 1$ で $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ であるから、 $0 \leq x \leq 1$ で $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$ より

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$\int_0^1 x^{2n} dx = \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} \text{ より}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

$$(4) 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-2}$$

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-2} \right\} dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{2k-2} \right\} dx &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-1)^{k-1} x^{2k-2} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \right]_0^1 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \end{aligned}$$

また

$$\int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^2} dx \text{ より}$$

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^2} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \leq \int_0^1 \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^2} dx$$

(2), (3)より

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx \geq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2} dx \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}$$

よって

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4} \text{ であるから,}$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

参考

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ をライプニッツ級数やグレゴリー級数という。この級数の

極限値を求める方法はいろいろ知られている。

例6

自然数 n に対して $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき、 $\left| f_n(x) - \frac{1}{x+1} \right| \leq x^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

解説

(1) $x \geq 0$ から、 $-x \leq 1$ より

$$f_n(x) = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$$

$$f_n(x) - \frac{1}{x+1} = -\frac{(-x)^n}{x+1}$$

$x \geq 0$ より

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{x+1} \right| = \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$$

(2) (1)より、 $x \geq 0$ のとき、 $-x^n \leq f_n(x) - \frac{1}{x+1} \leq x^n$ より

$$-\int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \text{ より}$$

$$-\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n+1} \right) = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

$$(3) \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \{1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1}\} dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right]_0^1 = a_n$$

よって、(2)より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \left[\log(x+1) \right]_0^1 = \log 2$$

参考

$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ をメルカトール級数といいます。この級数の極限値の求め方もいろいろ知られている。ライプニッツ級数とメルカトール級数は同じような方法で求めることができます。

例7

数列 $\{I_n\}$ を関係式 $I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$, $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

で定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) I_0 を求めよ。
- (2) I_1 を求めよ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、 $I_n - I_{n-1}$ を n の式で表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。
- (5) $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

解説

$$(1) I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned} (2) I_1 &= \frac{1}{1!} \int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + I_0 = -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx \\ &= \frac{1}{n!} \left[-x^n e^{-x} \right]_0^1 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -\frac{e^{-1}}{n!} + I_{n-1} = I_{n-1} - \frac{1}{n! e} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!e}$$

$$(4) 0 \leq x \leq 1 \text{ において, } 0 \leq x^n \leq 1$$

各辺に e^{-x} (>0) を掛けると, $0 \leq x^n e^{-x} \leq e^{-x}$ より

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\therefore 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

(5) (3) の結果は $n=1$ のときも成り立つ

よって

$$\begin{aligned} I_n &= I_0 + \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k-1}) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e} \left(-1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

より

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e - e I_n$$

(4) から, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e$$

【参考】 本問の元ネタはマクローリン展開である。マクローリン展開とは,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

と展開できるというものである。本問はいちばん上の式に $x=1$ を代入したものを示せというものである。不等式の証明問題などでもよくネタにされる。

例8

n を自然数とすると、等式 $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2n-2} + \frac{t^{2n}}{1-t^2}$

の両辺を、区間 $[0, x]$ ($0 < x < 1$) で積分すると、

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$$

となる。これについて、次の問いに答えよ。

(1) $0 < x < 1$ のとき、

$$0 < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となることを示せ。

(2) $0 < x < 1$ のとき、無限級数

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

の和を求めよ。

解説

(1) $0 \leq t \leq x$, $0 < x < 1$ のとき、 $0 < \frac{t^{2n}}{1-t^2} \leq \frac{t^{2n}}{1-x^2}$ より

$$\int_0^x 0 dt < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-x^2} dt$$

ここで、

$$\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-x^2} dt = \left[\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

より

$$0 < \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt < \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(2) $S_n = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ とおくと、(1) より

$$0 < \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} - S_n < \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = 0$ であるから、

はさみうちの原理より

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき, } S_n \rightarrow \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$$

よって、求める和は

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} &= \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

〔注〕本問は $\frac{1}{1-t^2}$ のマクローリン展開である。 $\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} dt$ を剰余項とい

い、 $\frac{1}{1-t^2}$ を級数展開し、ある n で止めたときの誤差になる。これが 0 に収束するならば、級数展開を続けていけば、もとの関数に限りなく近づくことを意味する。

補1

自然数 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) I_1 を求めよ. 更に, すべての自然数 n に対して, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(3) これらの結果を使って, $\log 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ が成り立つことを示せ.

解説

$$(1) I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \left[x - \log|1+x| \right]_0^1 = 1 - \log 2$$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$(2) 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき, } \frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n \text{ より}$$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{ここで, } \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx = \frac{1}{2(n+1)}, \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$(3) (1) \text{ から, } 1 = I_1 + \log 2, \frac{1}{n+1} = I_{n+1} + I_n \text{ であるから}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$= (I_1 + \log 2) - (I_2 + I_1) + (I_3 + I_2) - (I_4 + I_3) + \dots + (-1)^{n-1} (I_n + I_{n-1})$$

$$= \log 2 + (-1)^{n-1} I_n$$

$$(2) \text{ から, } I_n \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$$

補2

0 以上の整数 n に対して, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ ($n \geq 1$) とおく

と, I_0 の値は ア , I_1 の値は イ である。 $I_n + I_{n+2}$ の値を n を用いて表すと ウ である。

$I_n > 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ の値は エ である。無限級数

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2})$ の値は オ である。以上から, 無限級数

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ の値は カ である。また, 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ の値は キ である。

解説

$$I_0 = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \left[-\log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2$$

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \left[\frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ とし $\tan x \geq 0$ であるから $\tan^n x \geq 0$ より, $I_n \geq 0$

$I_{n+2} \geq 0$ と $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ より

$$I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \therefore 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \dots \text{①}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^m (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2}) &= (I_0 + I_2) - (I_2 + I_4) + \cdots + (-1)^m (I_{2m} + I_{2m+2}) \\ &= I_0 + (-1)^m I_{2m+2} = \frac{\pi}{4} + (-1)^m I_{2m+2}\end{aligned}$$

①から, $\lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^m I_{2m+2} = 0$ より

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2}) = \overset{+}{=} \frac{\pi}{4} \cdots \textcircled{2}$$

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \text{ から, } I_{2k} + I_{2k+2} = \frac{1}{2k+1} \text{ より}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2}) = \overset{+}{=} \frac{\pi}{4}$$

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \text{ から, } I_{2k+1} + I_{2k+3} = \frac{1}{(2k+1)+1} = \frac{1}{2(k+1)} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k}{k+1} &= 2 \sum_{k=0}^l (-1)^k (I_{2k+1} + I_{2k+3}) \\ &= 2 \{ (I_1 + I_3) - (I_3 + I_5) + \cdots + (-1)^l (I_{2l+1} + I_{2l+3}) \} \\ &= 2 \{ I_1 + (-1)^l I_{2l+3} \} = \log 2 + 2(-1)^l I_{2l+3}\end{aligned}$$

①から, $\lim_{l \rightarrow \infty} (-1)^l I_{2l+3} = 0$ より

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \overset{*}{=} \log 2$$

補3

自然数 n に対し

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$T_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $S_n = T_n$ ($n=1, 2, \cdots$) となることを証明せよ.
- (2) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$T_n < \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < T_n + \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(1) 数学的帰納法を用いて示す

(i) $n=1$ のとき

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad T_1 = \frac{1}{2} \quad \text{より, } S_1 = T_1 \text{ は成り立つ}$$

(ii) $n=k$ ($k \geq 1$) のとき, 成り立つと仮定して

$$S_k = T_k$$

$n=k+1$ のとき, 成り立つことを示す

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &= T_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{k+1} + T_{k+1} - \frac{2}{2k+2} = T_{k+1} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) から, 数学的帰納法より

すべての自然数 n について, $S_n = T_n$

(2) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ とおくと, 面積を利用して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &< \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \therefore T_n &< \int_0^1 \frac{dx}{1+x} < T_n + \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

(3) (1), (2) より

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{2n} < S_n < \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2$$

補4

n を正の整数または 0 とする. 次の(1)~(7)に答えよ.

(1) 次の式を示せ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

(2) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおく. 次の式を示せ.

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(3) 次の式を示せ.

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(4) $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x dx$ とおく. 次の式を示せ.

$$S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1} S_n = \frac{2}{2n(2n-1)} I_{2n} \quad (n \geq 1)$$

(5) 次の式を示せ. ただし, N は整数で $N \geq 1$ とする.

$$S_N = \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)$$

(6) 次の式を示せ. ただし, N は整数で $N \geq 1$ とする.

$$S_N \leq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2N)(2N-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3$$

なお, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ では $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ であることを用いてよい.

(7) 次の式を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解説

(1) $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ とおくと, $\frac{dx}{d\theta} = -1$ より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) (-d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x \, dx \\
&= \left[-\cos x \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
\therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$(3) \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

n が偶数のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

n が奇数のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (x^2 \cos^{2n-1} x) \, dx \\
&= \left[\sin x \cdot x^2 \cos^{2n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \{ 2x \cos^{2n-1} x + (2n-1)x^2 \cos^{2n-2} x (-\sin x) \} \, dx \\
&= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos^{2n-1} x \sin x \, dx + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos^2 x) \cos^{2n-2} x \, dx \\
&= \left[2x \frac{1}{2n} \cos^{2n} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx + (2n-1)(S_{n-1} - S_n) \\
&= -\frac{1}{n} I_{2n} + (2n-1)(S_{n-1} - S_n)
\end{aligned}$$

$$(2n-1)S_{n-1} - 2nS_n = \frac{1}{n}I_{2n}$$

$$\therefore S_{n-1} - \frac{2n}{2n-1}S_n = \frac{2}{2n(2n-1)}I_{2n} \quad (n \geq 1)$$

(5) (i) $N=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx \\ &= \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{2} \left(\left[x^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx \right) \\ &= \frac{\pi^3}{48} - \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \right) \\ &= \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \right) = I_2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \end{aligned}$$

よって, 成り立つ

(ii) $N=k-1$ ($k=1, 2, 3, \dots$) のとき成り立つと仮定して

$$S_{k-1} = I_{2k-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right)$$

$n=k$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned} I_{2k-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right) - \frac{2k}{2k+1} S_{k+1} &= \frac{2}{2k(2k-1)} \cdot \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{1}{2k^2} I_{2k-2} \\ \frac{2k}{2k-1} S_k &= I_{2k-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) = I_{2k-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right) \\ \therefore S_k &= \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right) = I_{2k} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

よって, 成り立つ

(i), (ii) から数学的帰納法より, 与式は常に成り立つ

(6) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, $x < \frac{\pi}{2} \sin x$ を用いて

$$S_N < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right)^2 \cos^{2N} x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} \sin^2 x \cos^{2N} x dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \cos^{2N} x dx \\
&= \frac{\pi^2}{4} (I_{2N} - I_{2N+2}) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2N+1}{2N+2} \right) I_{2N} \\
&= \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3) \cdots 1}{(2N)(2N-2) \cdots 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3
\end{aligned}$$

よって、示された

(7) (5) と (6) から、 N が十分大きいとき

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{(2N-1)(2N-3) \cdots 1}{(2N)(2N-2) \cdots 2} \cdot \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{2N+2} \cdot \frac{(2N-1)(2N-3) \cdots 1}{(2N)(2N-2) \cdots 2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \\
\therefore 0 &< \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

$N \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{N+1} \rightarrow 0$ であるから、

はさみうちの原理より

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \\
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

【参考】 本問のように $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ であることを求める問題をバーゼル問題という。これは、ゼータ関数と呼ばれるものの1つでもある。