

3.4 方程式への応用

(1) 方程式への応用

グラフを利用して、方程式の実数解の個数を調べることを考える。

例1

方程式 $x^3 = e^x$ の実数解の個数を求めよ。

解説

$$x^3 = e^x$$

$$x^3 e^{-x} = 1$$

$$f(x) = x^3 e^{-x} \text{ とおく}$$

$f(x) = 1$ の実数解の個数は

$y = f(x)$ と $y = 1$ の共有点の個数に等しい

$$f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは, } x = 0, 3$$

$x = 3$ で極大

$$\text{極大値 } f(3) = 27e^{-3} > 27 \cdot 3^{-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^3 e^t) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$$

$y = f(x)$ と $y = 1$ は共有点を 2 個もつから

方程式 $x^3 = e^x$ の実数解の個数は 2 個である

☞ $e^x - x^3 = 0$ として考えてもよいが,

$f(x) = e^x - x^3$ の増減を調べるのは面倒である。

x	...	0	...	3	...
y'	+	0	+	0	-
y	↗	0	↗	極大	↘

例2

$x > 0$ の範囲において、方程式 $e^x = x + e$ は解をただ 1 つもつことを示せ。また、その解を α とするとき、 α は $1 < \alpha < 1.5$ を満たすことを示せ。ただし、 e は自然対数の底であり、 2.7 より大きく 2.8 より小さい数である。

解説

$$f(x) = e^x - x - e \text{ とおく}$$

$$f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad (x > 0) \text{ より}$$

$f(x)$ は $x > 0$ で単調増加

$$f(0) = 1 - e < 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ より}$$

$y = f(x)$ のグラフは、 $x > 0$ において x 軸とただ 1 つの交点をもつ

すなわち、 $e^x = x + e$ は $x > 0$ において解をただ 1 つもつ

また

$$f(1) = e - 1 - e = -1 < 0$$

$$f(1.5) = e^{1.5} - 1.5 - e = e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} - e = e\sqrt{e} - \frac{3}{2} - e = e(\sqrt{e} - 1) - \frac{3}{2}$$

ここで、 $2.7 < e < 2.8$ であるから、 $\sqrt{2.7} < \sqrt{e}$

$(1.6)^2 = 2.56 < 2.7$ であるから、 $1.6 < \sqrt{2.7} < \sqrt{e}$ より

$$\begin{aligned} f(1.5) &> 2.7(1.6 - 1) - \frac{3}{2} \\ &= 2.7 \times 0.6 - 1.5 \\ &= 1.62 - 1.5 = 0.12 > 0 \end{aligned}$$

よって、 $1 < \alpha < 1.5$

例3

関数 $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ について

(1) 曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 定数 k に対して、方程式 $e^x = k(x-1)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解説

(1) $f(x)$ の定義域は $x \neq 1$ である。

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは, $x = 2$

$x = 2$ で極小 極小値 $f(2) = e^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty,$$

漸近線は $x = 1$, $y = 0$

$y = f(x)$ の概形は右図

(2) $e^x = k(x-1)$

$x = 1$ は解ではないから, $x \neq 1$ として

$$\frac{e^x}{x-1} = k$$

$f(x) = k$ の実数解の個数は,

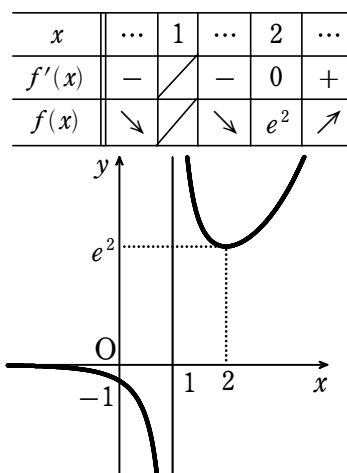
$y = f(x)$ と $y = k$ の共有点の個数に等しいから

求める実数解の個数は

$k > e^2$ のとき 2 個

$k = e^2, k < 0$ のとき 1 個

$0 \leq k < e^2$ のとき 0 個



例4

方程式 $2\log(x-a) - \frac{a}{x} = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつような実数 a の範囲を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

解説

$$f(x) = 2\log(x-a) - \frac{a}{x} \text{ とおく}$$

定義域は, $x > a, x \neq 0$

$f(x) = 0$ の実数解の個数は,

$y = f(x)$ と x 軸との共有点の個数に等しい

$$f'(x) = \frac{2}{x-a} + \frac{a}{x^2} = \frac{(x+a)(2x-a)}{x^2(x-a)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ となるのは } x = -a, \frac{a}{2}$$

(i) $a \geq 0$ のとき

$x > a$ で $f'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

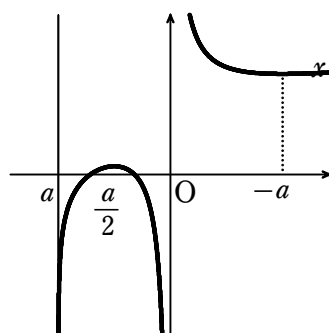
よって, $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 1 個

(ii) $a < 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	(a)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	極小	$\nearrow$



$x = \frac{a}{2}$ のとき極大

$$\text{極大値 } f\left(\frac{a}{2}\right) = 2\log\left(-\frac{a}{2}\right) - 2$$

$x = -a$ のとき極小

$$\text{極小値 } f(-a) = 2\log(-2a) + 1$$

方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつとき

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f(-a) > 0$$

$$\therefore a < -2e, \quad -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} < a < 0$$

[注] 定数が上手く分離できないときは, 極値の符号等を利用する。

例5

xy 平面上の曲線 $y = xe^{-x}$ を C とする。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 曲線 C の凹凸を調べ、変曲点の座標をすべて求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 (t, te^{-t}) における曲線 C の接線の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C について、点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るすべての接線の方程式と、その接点の座標を求めよ。
- (4) a は実数の定数とする。曲線 C に点 $(0, a)$ から引くことのできる接線の本数を求めよ。必要なら、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ を用いてよい。

解説

- (1) $f(x) = xe^{-x}$ とおく

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)e^{-x} \cdot (-1) = (x-2)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \text{ なのは, } x = 2$$

$x < 2$ のとき $f''(x) < 0$, $x > 2$ のとき $f''(x) > 0$ より

曲線 C は $x < 2$ で上に凸であり、 $x > 2$ で下に凸である

変曲点の座標は、 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

- (2) 点 (t, te^{-t}) における曲線 C の接線の方程式は

$$y - te^{-t} = f'(t)(x - t)$$

$$y - te^{-t} = (1-t)e^{-t}(x - t)$$

$$\therefore y = (1-t)e^{-t}x + t^2e^{-t} \dots \textcircled{1}$$

- (3) ①が点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るとき

$$0 = (1-t)e^{-t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + t^2e^{-t}$$

$$(2t^2 + t - 1)e^{-t} = 0$$

$e^{-t} \neq 0$ より

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$(2t-1)(t+1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2}, -1$$

$t = \frac{1}{2}$ のとき、接線は $y = \frac{1}{2\sqrt{e}}x + \frac{1}{4\sqrt{e}}$, 接点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$

$t = -1$ のとき，接線は $y = 2ex + e$ ，接点は $(-1, -e)$

(4) ①が点 $(0, a)$ を通るとき

$$a = t^2 e^{-t} \dots \textcircled{2}$$

接線の本数 = 接点の個数より

点 $(0, a)$ から曲線 C に引ける接線の本数は，

t の方程式②の実数解の個数等しい

$$g(t) = t^2 e^{-t} \text{ とすると}$$

$g(t) = a$ の実数解の個数は，

$y = g(t)$ と $y = a$ の共有点の個数に等しい

$$g'(t) = 2te^{-t} + t^2 e^{-t} \cdot (-1) = t(2-t)e^{-t}$$

$g'(t) = 0$ となるのは， $t = 0, 2$

$t = 0$ のとき極小 極小値 $g(0) = 0$

$t = 2$ のとき極大 極大値 $g(2) = \frac{4}{e^2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0$$

$y = g(t)$ のグラフの概形は右図

求める接線の本数は

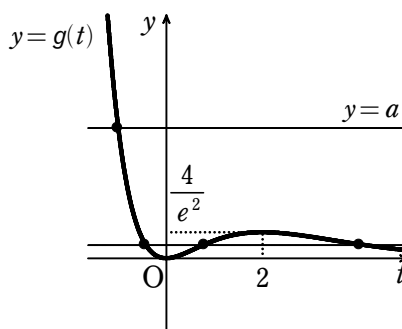
$a < 0$ のとき，0 本

$a = 0, \frac{4}{e^2} < a$ のとき，1 本

$0 < a < \frac{4}{e^2}$ のとき，3 本

$a = \frac{4}{e^2}$ のとき，2 本

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$



例6

a を実数とする。このとき，曲線 $y = e^x$ と $y = (x-a)^2$ の両方に接する直線が存在するような a の値の範囲を求めよ。

解説

$f(x) = e^x$ とおく

$$f'(x) = e^x$$

$y = f(x)$ の $x = t$ における接線の方程式は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

$$\therefore y = e^t x + (1-t)e^t$$

この直線が曲線 $y = (x-a)^2$ と接するとき

$$(x-a)^2 = e^t x + (1-t)e^t$$

$$x^2 - (2a + e^t)x + a^2 + (t-1)e^t = 0$$

が重解をもてばよいから

判別式を D として, $D=0$ より

$$D = (2a + e^t)^2 - 4\{a^2 + (t-1)e^t\} = 0$$

$$4ae^t + e^{2t} - 4(t-1)e^t = 0$$

$e^t > 0$ より

$$4a + e^t - 4(t-1) = 0$$

$$t - 1 - \frac{e^t}{4} = a$$

この t の方程式が実数解をもてばよい

$$g(t) = t - 1 - \frac{e^t}{4} \text{ とおく}$$

$g(t) = a$ の実数解は,

$y = g(t)$ と $y = a$ の共有点の x 座標に等しい

$$g'(t) = 1 - \frac{e^t}{4} = \frac{4 - e^t}{4}$$

$g'(t) = 0$ となるのは, $t = \log 4$

$t = \log 4$ のとき極大

$$\text{極大値 } f(\log 4) = \log 4 - 2$$

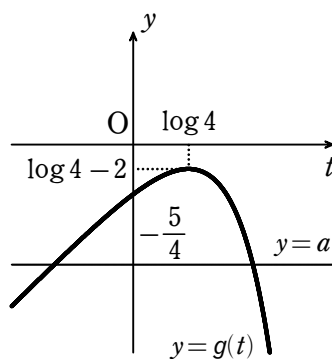
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(t - 1 - \frac{e^t}{4} \right) = -\infty$$

$y = f(t)$ のグラフは右図

よって, 求める a の値の範囲は

$$a \leq \log 4 - 2$$

t	...	$\log 4$	...
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\nearrow$	$\log 4 - 2$	$\searrow$



例7

2つの曲線 $C_1: y = \log x$ および $C_2: y = \sqrt{ax}$ を考える。ただし、 a は正の定数である。

(1) 曲線 C_1 上の点 $(t, \log t)$ における接線 ℓ_1 の方程式、および曲線 C_2 上の点 $(s, \sqrt{as})$ における接線 ℓ_2 の方程式を求めよ。ただし、 $t > 0$, $s > 0$ である。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の両方に接する直線が存在しないための a の値の範囲を求めよ。

解説

(1) $f(x) = \log x$, $g(x) = \sqrt{ax}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}}$$

ℓ_1 の方程式は

$$y - \log t = f'(t)(x - t)$$

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$$

ℓ_2 の方程式は

$$y - \sqrt{as} = g'(s)(x - s)$$

$$y - \sqrt{as} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{s}}(x - s) \quad \therefore y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{s}}x + \frac{1}{2} \sqrt{as}$$

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線が存在しないとき

ℓ_1, ℓ_2 が一致するような正の実数 t, s の組が存在しない、すなわち

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{s}} \quad \dots \textcircled{1}, \quad \log t - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{as} \quad \dots \textcircled{2}$$

をともに満たす正の実数 t, s の組が存在しない

①, ② が成り立つとすると,

$$\textcircled{1} \text{ より, } 2\sqrt{s} = t\sqrt{a} \quad 4s = t^2a \quad \therefore s = \frac{1}{4}t^2a \quad \dots (*)$$

② より

$$\log t - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{a \cdot \frac{1}{4}t^2a}$$

$$\therefore \frac{4(\log t - 1)}{t} = a \quad \dots \textcircled{3}$$

t の方程式③が $t > 0$ に実数解をもたなければよい

$$h(t) = \frac{4(\log t - 1)}{t} \quad (t > 0) \text{ とする}$$

$h(t) = a$ の実数解は,

$y = h(t)$ と $y = a$ の共有点の t 座標に等しい

$$h'(t) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{t} \cdot t - (\log t - 1) \cdot 1}{t^2} = \frac{-4(\log t - 2)}{t^2}$$

$h'(t) = 0$ となるのは, $t = e^2$

$t = e^2$ で極大 極大値 $h(e^2) = \frac{4}{e^2}$

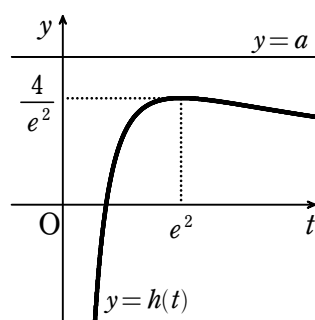
$$\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

$y = h(t)$ のグラフは右図

よって, 求める a の値の範囲は

$$a > \frac{4}{e^2}$$

t	0	...	e^2	...
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘



例8

a を定数とする。 $0 < x < \pi$ において, 関数 $f(x) = \frac{\sin x}{4 + \cos x}$ および

$g(x) = f(x) - ax$ を考える。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $g(x)$ が極値をとるような a の値の範囲を求めよ。

(解説)

$$(1) f'(x) = \frac{\cos x(4 + \cos x) + \sin^2 x}{(4 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{4\cos x + 1}{(4 + \cos x)^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$4\cos x + 1 = 0$$

この解を $x = \alpha$ とする

$$\left(\cos \alpha = -\frac{1}{4}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \right)$$

$x = \alpha$ のとき, 極大かつ最大

$$\text{最大値 } f(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

x	0	...	α	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$$(2) g'(x) = f'(x) - a = \frac{4\cos x + 1}{(4 + \cos x)^2} - a$$

$g(x)$ が $0 < x < \pi$ において極値をとるとき、
 $0 < x < \pi$ において $g'(x) = 0$ を満たす x が存在し、
 その前後で $g'(x)$ の符号が変わる

$$h(x) = \frac{4\cos x + 1}{(4 + \cos x)^2} \text{ とおく}$$

$g'(x) = 0$, すなわち $h(x) = a$ の実数解は
 $y = h(x)$ と $y = a$ の共有点の x 座標に等しい

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-4\sin x(4 + \cos x)^2 + 2\sin x(1 + 4\cos x)(4 + \cos x)}{(4 + \cos x)^4} \\ &= \frac{2\sin x(2\cos x - 7)}{(4 + \cos x)^3} \end{aligned}$$

$0 < x < \pi$ のとき $h'(x) < 0$ より、

$h(x)$ は単調に減少する

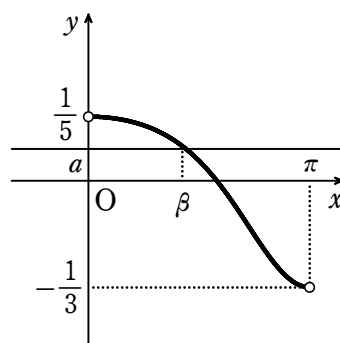
$$h(0) = \frac{1}{5}, \quad h(\pi) = -\frac{1}{3}$$

$0 < x < \pi$ における $h(x)$ のグラフは右図

$-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{5}$ のとき、方程式 $g'(x) = 0$ は

$0 < x < \pi$ において実数解 β をもち、
 $x = \beta$ の前後で $g'(x) = h(x) - a$ の符号が変化するから、求める a の値の範囲は

$$-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{5}$$



補1

(1) $f(x) = e^{4x} \cos^2 x$ とする。 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $f(x)$ は増加することを示せ。

(2) $g(x) = e^{4x} - 2 - \tan x$ とする。 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において方程式 $g(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad f'(x) &= 4e^{4x} \cos^2 x + e^{4x} (-2 \cos x \sin x) \\ &= 2e^{4x} \cos^2 x (2 - \tan x) \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } \cos^2 x > 0, 2 - \tan x > 0 \text{ より, } f'(x) > 0$$

よって, $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において, $f(x)$ は増加する

$$(2) \quad g'(x) = 4e^{4x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4e^{4x} \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{4f(x) - 1}{\cos^2 x}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ において } \cos^2 x > 0 \text{ より,}$$

$g'(x)$ の符号は $4f(x) - 1$ の符号と一致する

$h(x) = 4f(x) - 1$ とおくと,

$h(x)$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ で連続であり,

(1) より $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $f(x)$ が増加するから, $h(x)$ も増加する

$$h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{-\pi} - 1 = \frac{2 - e^{\pi}}{e^{\pi}} < \frac{2 - 2^3}{e^{\pi}} < 0$$

$$h(0) = 4 - 1 = 3 > 0$$

よって, $h(x) = 0$ は $-\frac{\pi}{4} < x < 0$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつ

この解を $x = \alpha$ $\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0\right)$ とおくと

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ における $g(x)$ の増減表

は右図

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\pi} - 1 = \frac{1 - e^{\pi}}{e^{\pi}} < 0$$

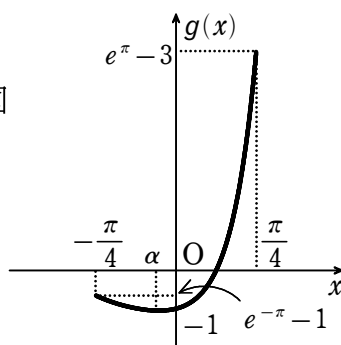
x	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi} - 3 > 2^3 - 3 > 0$$

よって、 $g(x) = e^{4x} - 2 - \tan x$ のグラフは右図

したがって、 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $g(x) = 0$

はただ 1 つの実数解をもつ



補2

3 次方程式 $x^3 - kx + 2 = 0$ (k は実数) の実数解の個数を求めよ。

(解説)

$$x^3 - kx + 2 = 0$$

$x=0$ は解ではないから、 $x \neq 0$ として

$$\frac{x^3 + 2}{x} = k$$

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x} \text{ とおく}$$

$f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

$f(x) = k$ の実数解の個数は、

$y = f(x)$ と $y = k$ の共有点の個数に等しい

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは、 $x = 1$

$x = 1$ のとき極小 極小値 $f(1) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\infty$$

$y = f(x)$ のグラフは右図

$y = k$ との共有点の個数を調べて、

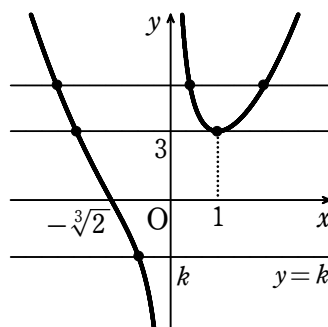
実数解の個数は

$k < 3$ のとき 1 個

$k = 3$ のとき 2 個

$k > 3$ のとき 3 個

x	...	0	...	1	...
y'	-	/	-	0	+
y	↘	/	↘	3	↗



補3

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) とする。

(1) $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフをかき、方程式 $f(x) = k$ が 2 つの異なる解をもつような定数 k の範囲を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ は用いてよい。

(3) a を正の定数とする。方程式 $x^a = a^x$ ($x > 0$) が a より大きい解をもつような a の範囲を求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$1 - \log x = 0 \quad \therefore x = e$$

$x = e$ で極大 極大値 $f(e) = \frac{1}{e}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$y = f(x)$ のグラフは右図

$f(x) = k$ の異なる解の個数は、

$y = f(x)$ と $y = k$ の共有点の個数に等しいから

$f(x) = k$ が 2 つの異なる解をもつとき

$$0 < k < \frac{1}{e}$$

$$(3) x^a = a^x$$

$a > 0$, $x > 0$ であるから、両辺は正より

両辺の自然対数をとって

$$\log x^a = \log a^x$$

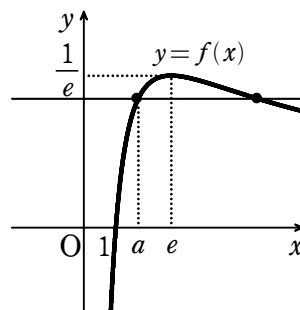
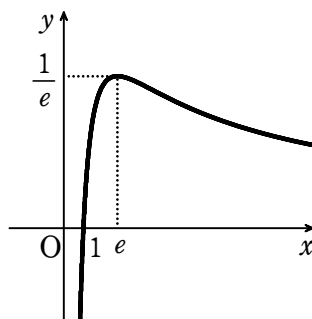
$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a} \dots \textcircled{1}$$

①が a より大きい解をもつような a の値の範囲を求めればよい

$x = a$ は①の解である

①が a より大きい解をもつとき、

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$



①は異なる 2 つの解をもち、
 小さい方の解が a であればよいから
 $1 < a < e$

補4

$f(x) = e^{-x} \sin x$ (ただし, $x > 0$) であるとする。ここで, e は自然対数の底である。

- (1) $f(x)$ の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ。
 (2) 方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解が 2 個であるとき, a の範囲を求めよ。ただし, $a > 0$ とする。

解説

(1) $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$$= e^{-x}(-\sin x + \cos x) = \sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$x + \frac{3}{4}\pi = n\pi \quad (n \text{ は自然数})$$

$$\therefore x = \left(n - \frac{3}{4}\right)\pi$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

$0 < x < 2\pi$ において, $f(x)$ の増減表は右図

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}, \quad f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}$$

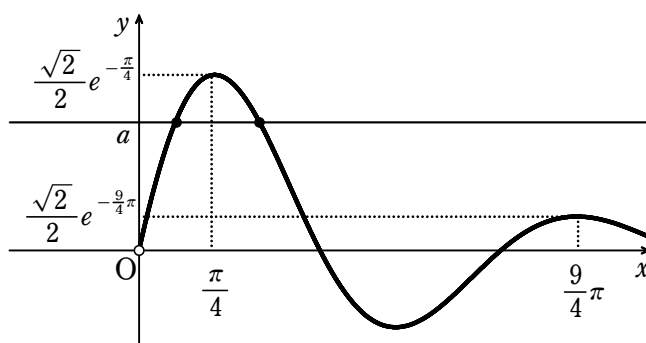
$x > 0$ において, $f(x)$ の極大値と極小値は無限個存在するが,
 極大値は n について減少し, 極小値は n について増加する
 よって, $f(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ で最大値 } \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}, \quad x = \frac{5}{4}\pi \text{ で最小値 } -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5}{4}\pi}$$

(2) (1) より, $f(x)$ の極大値は n について減少する。

$f(x)$ が極大値をとる x の値で 2 番目に小さいものは $\frac{9}{4}\pi$ であり

$$f\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{9}{4}\pi}$$



図より、 $a > 0$ のとき、方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解が 2 個であるような a の値の範囲は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{9}{4}\pi} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

補5

直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。

解説

$px + q = \log x \cdots \textcircled{1}$ とすると、

この実数解が $y = px + q$ と $y = \log x$ の共有点の x 座標であるから、
 $y = px + q$ が $y = \log x$ のグラフと共有点をもたないためには

$\textcircled{1}$ が実数解をもたなければよい

$$px + q - \log x = 0$$

$$f(x) = px + q - \log x \text{ とおく}$$

$f(x)$ の定義域は、 $x > 0$

$f(x) = 0$ の実数解の個数は、

$y = f(x)$ と x 軸との共有点の個数に等しい

$$f'(x) = p - \frac{1}{x}$$

(i) $p \leq 0$ のとき

$$x > 0 \text{ より、 } f'(x) < 0$$

よって、 $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{ より}$$

$y = f(x)$ のグラフは必ず x 軸と共有点をもつので不適

(ii) $p > 0$ のとき

$f'(x)=0$ となるのは, $x=\frac{1}{p}$

$f(x)=0$ が実数解をもたないとき,

$y=f(x)$ が x 軸と共有点をもたなければよいから

$$f\left(\frac{1}{p}\right) > 0$$

$$1+q+\log p > 0$$

$$\therefore q > -\log p - 1$$

(i), (ii) より

$$p > 0, q > -\log p - 1$$

x	0	...	$\frac{1}{p}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

補6

a を実数とし, $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+a$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 原点 O から曲線 $y=f(x)$ にちょうど2本の接線が引けるような a の値を求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t) = f'(t)(x-t)$$

$$y = \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)(x-t) + t^2 - \frac{1}{t} + a$$

$$\therefore y = \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)x - t^2 - \frac{2}{t} + a$$

(2) (1) で求めた接線が原点を通るとき

$$0 = -t^2 - \frac{2}{t} + a$$

$$t^2 + \frac{2}{t} = a$$

この方程式を満たす実数 t の個数と, 原点を通る接線の本数は一致するから, この方程式が異なる2つの実数解をもてばよい

$$g(t) = t^2 + \frac{2}{t} \text{ とおく}$$

$$g'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t^3 - 1)}{t^2}$$

$g'(t) = 0$ とすると, t は実数より, $t = 1$

$g(t)$ の増減表は次のようになる

t	...	0	...	1	...
$g'(t)$	-	/	-	0	+
$g(t)$	↘	/	↘	3	↗

$$\lim_{t \rightarrow -0} g(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +0} g(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty \text{ より}$$

$y = g(t)$ のグラフは右図

$y = g(t)$ のグラフと直線 $y = a$ が 2 つの
共有点をもつとき, $a = 3$

よって, 求める a の値は $a = 3$

