

高3数学 発展問題演習 演習 13. 微分法

1 [名古屋市立大]

実数全体で定義され、実数値をとる関数 $f(x), g(x)$ がある。任意の実数 a, b に対し、

$$f(a+b) = f(a)g(b) + f(b)g(a), f(a-b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

を常に満たすものとし、 $f(x)$ は恒等的には 0 でないとする。

- (1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ。
- (2) 任意の実数 x, h に対して、 $f(x+2h) - f(x) = 2f(h)g(x+h)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき、 $f'(x)$ を $f'(0)$ と $g(x)$ で表せ。

2 [I. 2006 千葉大 II. 1998 星薬科大 III. 2009 北海道大]

I. 放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は 0 でない定数とする。

- (1) 原点から放物線 $y = ax^2 - 2x + 1$ に引いた接線が 2 本あるための a の条件を求めよ。
また、これらの接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) で得られた 2 接線のなす角が 45° となるような a の値を求めよ。

II. 曲線 $C: y = \frac{1}{3}x^3$ 上の点 $A\left(a, \frac{1}{3}a^3\right)$ における接線を l_1 とする (ただし、 $a > 0$)。

また、 l_1 とは異なる C の接線のうち、点 A を通る接線を l_2 とするとき

- (1) 接線 l_1 および l_2 が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α および β とするとき、
 $\tan \alpha, \tan \beta$ を a を用いて表せ。
- (2) l_1 が l_2 となす角を θ (ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$) とするとき、 $\tan \theta$ を a を用いて表せ。
- (3) $\tan \theta$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。

III. $t > 0$ とし、 $x = t$ で表される直線を ℓ_1 とする。 $y = \frac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。

C と ℓ_1 の共有点 $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を ℓ_2 とする。

- (1) ℓ_1 と ℓ_2 のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。
- (2) ℓ_1 を ℓ_2 に関して対称移動させた直線を ℓ_3 とおくと、 ℓ_3 の方程式を求めよ。
- (3) ℓ_3 は t によらない定点を通ることを示せ。
- (4) ℓ_3 と C の 2 つの共有点を P, Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ。

高3数学 発展問題演習 演習 13. 微分法

3 [I. 京都府立医科大 II. 2020 京都大 III. 東京大]

I. xy 平面において、 y 軸上に中心をもつ円 C_1 と $y = x^3$ で表される曲線 C_2 は異なる 2 つの共有点 A, B をもち、A および B の両方の点において、 C_1 と C_2 は共通の接線をもつとする。

- (1) 点 A または点 B は原点 O と一致することを示せ。
- (2) 円 C_1 の中心の座標を求めよ。

II. x の 2 次関数で、そのグラフが $y = x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし、2 つの関数のグラフがある点で直交するとは、その点が 2 つのグラフの共有点であり、かつ接線どうしが直交することをいう。

III. $a > 0$ に対して次の 2 つの放物線を考える。

$$C_1: y = x^2 + \frac{1}{a^2}, C_2: y = -(x-a)^2$$

- (1) C_1, C_2 の両方に接するような直線が 2 本存在することを示せ。
- (2) (1) で定まる 4 つの接点を頂点とする四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

4 [I. 1996 大分大 II. 2007 大阪市立大]

I. a を定数とする。関数 $f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 2(a+3)x^3 - 9ax^2 + a^2$ が極小値をもつとき、その極小値を求めよ。

II. a, b は定数とする。関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が $x=0$ で極値をとるための必要十分条件は、 $b \neq 0$ または $a=b=0$ であることを示せ。
- (2) $f(x)$ が $x=0$ で極値をとり、更に 0 以外の x で極値をとるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

5 [I. 2020 大阪市立大 II. 関西大 III. 2005 慶応義塾大]

I. a, b を実数とする。3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつための a, b の条件を求めよ。
- (2) (1) の条件が成り立つとする。このとき、 $f(x)$ の極大値の絶対値と極小値の絶対値が等しくなるための a, b の条件を求めよ。
- (3) (1) と (2) の条件を同時に満たす実数の組 (a, b) の集合を座標平面上に図示せよ。

高3数学 発展問題演習 演習 13. 微分法

Ⅱ. 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 - x$ について、

- (1) この関数 $f(x)$ の極大値は正、極小値は負であることを示せ。
- (2) 極大値が極小値の絶対値より小であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

Ⅲ. a と b を実数とし、3 次関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする。

- (1) $f(x)$ が極大値と極小値の両方をもつための必要十分条件を a と b を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値をとり、 $x = \beta$ で極小値をとるとする。 $f(\alpha) - f(\beta)$ を a と b の簡単な式で表せ。
- (3) $S = \{(a, b) \mid a \geq -1 \text{ かつ } b \leq -1\}$ とする。 (a, b) が S 内を動くとき、 $f(\alpha) - f(\beta)$ の最小値を求めよ。

〔6〕〔Ⅰ. 2015 東京医科歯科大 Ⅱ. 2002 一橋大 Ⅲ. 慶応義塾大〕

Ⅰ. 実数 a, b に対し、 $f(x) = x^3 - 3ax + b$ とおく。 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。

- (1) $a > 0$ のとき、 $f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。
- (2) $b \geq 0$ のとき、 M を a, b を用いて表せ。
- (3) a, b が実数全体を動くとき、 M のとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅱ. 頂点が z 軸上にあり、底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円すいがある。この円すいの側面が、原点を中心とする半径 1 の球に接している。

- (1) 円すいの表面積の最小値を求めよ。
- (2) 円すいの体積の最小値を求めよ。

Ⅲ. 等しい辺の長さが 1、その挟む角 (頂角) が 2θ である二等辺三角形を 4 つ使って四面体を作り、その体積を V とする。

- (1) $x = \cos^2 \theta$ とおくとき、 V を x を用いて表せ。
- (2) V の最大値を求めよ。

〔7〕〔名古屋大 一橋大 立命館大 一橋大 東京大 大阪大 京都大 静岡大 学習院大〕

Ⅰ. 関数 $f(x)$ は x の 3 次式で、 $x = 0$ で極大値 3 をとり、 $x = 1$ で極小値 -1 をとるものとする。

- (1) $f(x)$ を求め、そのグラフの概形をかけ。
- (2) $f(x) = 0$ の負の解を $-\alpha$ 、正の解を β, γ ($\beta < \gamma$) とするとき、 $\alpha < \beta$ であることを証明せよ。

高3数学 発展問題演習 演習 13. 微分法

II. k は整数であり、3 次方程式 $x^3 - 13x + k = 0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。 k とこれらの整数解をすべて求めよ。

III. 実数 a, b, c を係数とする関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ がある。関数 $f(x)$ は $x = -2, \frac{2}{3}$ で極値をとる。

- (1) a, b の値を求めよ。また、極大値、極小値をそれぞれ求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための c の値の範囲を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもち、その 3 つの解が等差数列をなすとき、 c の値と 3 つの解をそれぞれ求めよ。
- (4) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの整数解をもつことはないことを示せ。

IV. a を 0 以上の定数とする。関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

V. a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

VI. 実数を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき、 $a > 0, b > 0$ ならば、少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。

VII. a, b, c を実数とする。 $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき、 $a^2 > b$ が成立することを示し、更にこれらの交点の x 座標のすべては区間 $-a - 2\sqrt{a^2 - b} < x < -a + 2\sqrt{a^2 - b}$ に含まれていることを示せ。

VIII. a, b を実数とする。3 次関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b$ について次の各問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための a の条件を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が相異なる 3 つの正の実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表し、この条件を満たす点 (a, b) の全体を座標平面上に図示せよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの相異なる正の実数解と 1 つの負の実数解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表し、この条件を満たす点 (a, b) の全体を座標平面上に図示せよ。

IX. a, b は実数で $a > 0$ とする。3 次方程式 $x^3 - 3a^2x - b = 0$ が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に少なくとも 1 つ解をもつための a, b の条件を求めよ。

高3数学 発展問題演習 演習 13. 微分法

8 [I . 1997 東京都立大 II . 京都大]

I . 方程式 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ について、次のことを証明せよ.

- (1) 1つの解を α とするとき、 $\alpha^2 - 2$ も解である.
- (2) 1つの解を α とするとき、 $\alpha, \alpha^2 - 2, (\alpha^2 - 2)^2 - 2$ は異なる3個の解を与える.

II . 実数 a に対して、 $f(x) = x^3 - 3ax$ とおく.

- (1) t を実数とする. 方程式 $f(x) = t$ が相異なる3個の実数解を持つために a と t が満たすべき条件を求めよ.
- (2) $g(x) = f(f(x))$ とおく. 方程式 $g(x) = 0$ が相異なる9個の解を持つような a の範囲を求めよ.

9 [I . 2015 東北大 II . 京都大]

I . xy 平面において、3次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式 $x^3 - x > y > -x$ の表す領域を D とする. また、 P を D の点とする.

- (1) P を通り C に接する直線が3本存在することを示せ.
- (2) P を通り C に接する3本の直線の傾きの和と積がともに0となるような P の座標を求めよ.

II . 曲線 $y = x^4 - 6x^2$ に、点 (a, b) を通る4つの接線が引けるのは、 (a, b) がどのような範囲にあるときか、図示せよ.

10 [2011 千葉大]

0以上1以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ.