

1.4 無限等比級数

(1) 無限級数の収束と発散

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ において、
各項を前から順に + の記号を結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \dots \textcircled{1}$$

を無限級数といい、 a_1 をその初項、 a_n を第 n 項という。この無限級数 $\textcircled{1}$ を、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表すこともある。

無限数列 $\{a_n\}$ において、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、数列 $\{S_n\}$ が得られる。すなわち、

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

.....

無限級数 $\textcircled{1}$ において、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

を、この無限等比級数の第 n 項までの部分和という。

部分和の作る無限数列 $\{S_n\}$ が収束して、その極限值が S であるとき、
すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ となるとき、無限級数 $\textcircled{1}$ は収束する
という。このとき、数列 $\{S_n\}$ の極限值 S を無限級数 $\textcircled{1}$ の和という。この和 S も $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 $\textcircled{1}$ は発散するという。

☞ 数列と数列の和については、数列の各項を足したものを数列の和というのに対し、無限級数については、収束するときのみその値を無限級数の和という。

(2) 無限等比級数

初項 a ，公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を，初項 a ，公比 r の無限等比級数という。

無限等比級数①の収束，発散について考える。

①の第 n 項までの部分和を S_n とすると

(i) $a=0$ のとき

$S_n=0$ であるから，無限等比級数①は収束して，その和は 0

(ii) $a \neq 0$ のとき

(ア) $r=1$ のとき

$$S_n = a + a + \cdots + a = na$$

$a \neq 0$ であるから，数列 $\{S_n\}$ は発散する。

(イ) $r \neq 1$ のとき

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$|r| < 1$ のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

$r \leq -1, r > 1$ のとき，数列 $\{r^n\}$ は発散するから，数列 $\{S_n\}$ も発散する。

以上から，次のことがいえる。

無限等比級数の収束・発散

無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束，発散は，次のようになる。

$a=0$ のとき 収束し，その和は 0

$a \neq 0$ のとき

$|r| < 1$ ならば 収束し，その和は $\frac{a}{1-r}$

$|r| \geq 1$ ならば 発散する

例1

(1) 初項が 3，第 2 項が 2 の無限等比級数の和を求めよ。

(2) 無限等比級数 $(2+\sqrt{2})-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})+\cdots$ の和を求めよ。

解説

(1) 公比を r とすると, $a_1=3, a_2=2$ より

$$3r=2 \quad \therefore r=\frac{2}{3}$$

よって, 無限等比級数の和 S は

$$S=\frac{3}{1-\frac{2}{3}}=\frac{9}{3-2}=9$$

(2) 公比は $\frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$

$-1 < 1-\sqrt{2} < 1$ であるから収束して, 和は

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=1+\sqrt{2}$$

例2

等比数列 $\{a_n\}$ が $a_2=-1$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{4}{3}$ を満たすとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解説)

$\{a_n\}$ の初項を a , 公比を r とすると, $a_2=-1, \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{4}{3}$ より

$$ar=-1, \frac{a}{1-r}=\frac{4}{3} \quad (a \neq 0, |r| < 1)$$

$$4r^2-4r-3=0 \quad (2r+1)(2r-3)=0$$

$$|r| < 1 \text{ より, } r=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=2$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

例3

(1) 次の無限等比級数が収束するような実数 x の範囲を求めよ。また, 収束するときの和を求めよ。

$$1-\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}x^2-\frac{64}{27}x^3+\cdots$$

(2) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (3-2x)^n$ が収束するような実数 x の範囲と, そのときの和を求めよ。

解説

(1) 公比は $-\frac{4}{3}x$ であるから、収束するとき

$$-1 < -\frac{4}{3}x < 1 \quad \therefore -\frac{3}{4} < x < \frac{3}{4}$$

このときの和は

$$\frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{3}x\right)} = \frac{3}{3 + 4x}$$

(2) この無限等比級数が収束するとき

$$-1 < 3 - 2x < 1 \quad \therefore 1 < x < 2$$

そのときの和は

$$\frac{3 - 2x}{1 - (3 - 2x)} = \frac{3 - 2x}{2x - 2}$$

例4

級数の和について

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\text{ア} \boxed{}}{\text{イ} \boxed{}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n\pi = \frac{\text{ウ} \boxed{}}{\text{エ} \boxed{}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{\text{オ} \boxed{}}{\text{カ} \boxed{}}$$

が成り立つ.

解説

$$(\text{ア}), (\text{イ}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$(\text{ウ}), (\text{エ}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cos n\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$$

(オ), (カ) $\left\{ \frac{1}{7^n} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$ は, $0, \frac{1}{7}, 0, -\frac{1}{7^3}, 0, \frac{1}{7^5}, 0, -\frac{1}{7^7}, \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{n\pi}{2}$ は, 初項 $\frac{1}{7}$, 公比 $-\frac{1}{7^2}$ の無限等比数列より, その和は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7^2}} = \frac{7}{50}$$

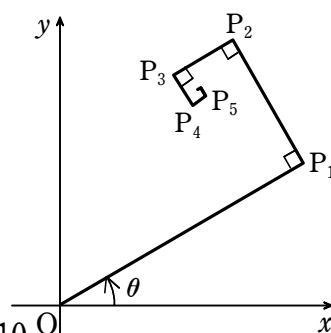
例5

図のように, 動点 P が原点 O から出発して, $P_1, P_2, P_3, \dots$ と進んでいく. ただし, $OP_1 = a$ で

$$P_1P_2 = \frac{1}{2}OP_1, P_2P_3 = \frac{1}{2}P_1P_2, \dots,$$

$$P_{n-1}P_n = \frac{1}{2}P_{n-2}P_{n-1}, \dots,$$

$$OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n + \dots = 10$$



である. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) $\theta = 0$ のとき, 点 P が近づいていく点 Q の座標を求めよ.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, 点 P が近づいていく点 R の座標を求めよ.

解説

(1) $OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots$ は,

初項が $OP_1 = a$, 公比が $\frac{1}{2}$ の無限等比級数より

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 10 \quad \therefore a = 5$$

(2) $\overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \frac{1}{2^n} \left(\cos \frac{n\pi}{2}, \sin \frac{n\pi}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (P_0 = O \text{ とする})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP_n} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \cos \frac{k\pi}{2}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \sin \frac{k\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ より

$$Q \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \cos \frac{k\pi}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \sin \frac{k\pi}{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \cos \frac{k\pi}{2} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$$

よって、点 Q の座標は $(4, 2)$

$$(3) (2) \overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \frac{1}{2^n} \left(\cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

($P_0 = O$ とする)

同様にして、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \cos \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{5}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots \right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} \right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{2^k} \sin \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{5}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} - \dots \right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、点 R の座標は $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

別解 複素数平面を利用

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のときの点の動きは、 $\theta = 0$ のときの点の動きを原点の回りに $\frac{\pi}{4}$

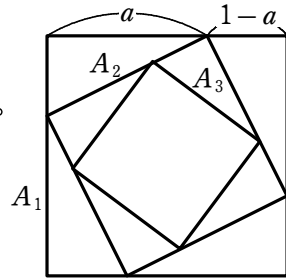
回転した動きである。複素数平面で考えると、点 Q を表す複素数は $4 + 2i$ であるから、点 R を表す複素数は

$$(4 + 2i) \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = (4 + 2i) \times \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

よって、点 R の座標は $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

例6

1 辺の長さが 1 の正方形 A_1 がある。 A_1 の各辺を、時計回りにそれぞれ $a : (1-a)$ ($0 < a < 1$) に内分する点を結んでできる正方形を A_2 とする。同様の手続きで、正方形 A_k から正方形 A_{k+1} を作る ($k=1, 2, \dots$)。正方形 A_k の面積を S_k とするとき、次の問いに答えよ。



- (1) S_2 を a の式で表せ。
- (2) S_k を k と a の式で表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束することを示し、その和 S を a の式で表せ。
- (4) S を最小にする a を求めよ。

解説

正方形 A_k の 1 辺の長さを x_k とする

$$(1) S_2 = x_2^2 = a^2 + (1-a)^2 = 2a^2 - 2a + 1$$

$$(2) S_{k+1} = x_{k+1}^2 = (ax_k)^2 + \{(1-a)x_k\}^2 = (2a^2 - 2a + 1)x_k^2 \\ = (2a^2 - 2a + 1)S_k$$

$\{S_k\}$ は初項 $S_1=1$ 、公比 $2a^2-2a+1$ の等比数列より

$$S_k = (2a^2 - 2a + 1)^{k-1}$$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は初項 1、公比 $2a^2-2a+1$ の無限等比級数

$$2a^2 - 2a + 1 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 < a < 1$ であるから、 $\frac{1}{2} \leq 2a^2 - 2a + 1 < 1$ より

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は収束し、その和 S は

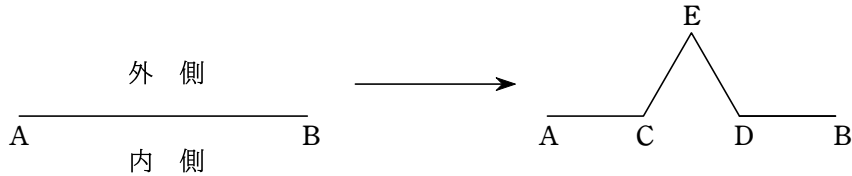
$$S = \frac{1}{1 - (2a^2 - 2a + 1)} = \frac{1}{2a - 2a^2}$$

(4) $S = \frac{1}{-2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$ より、 S を最小にする a は $a = \frac{1}{2}$

例7

平面内に多角形が与えられたとき，その各辺に対し次の操作を施す：

(ア) 多角形の辺，それを仮に AB とすると，辺 AB を 3 等分する点 C ， D をこの順に A に近い方からとり，これら 2 点を頂点とする正三角形の C ， D 以外の頂点を E とし，点 A ， C ， E ， D ， B を順に線分で結んでできる折れ線により，辺 AB をおきかえる。ただし，点 E は常に多角形の外側にとるものとする。

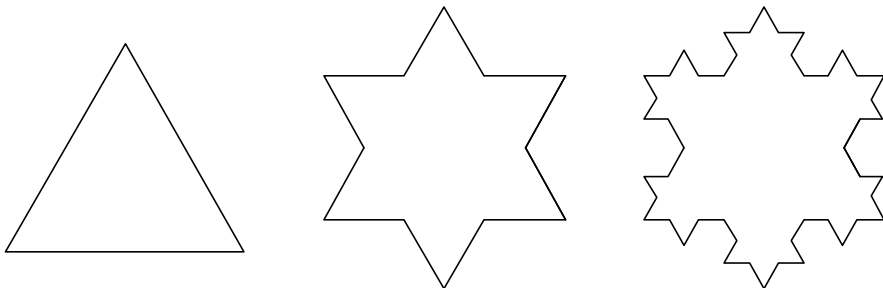


1 辺の長さが 1 の正三角形 T_0 の各辺に対し，上の操作 (ア) を施してできる多角形を T_1 ， T_1 の各辺に対し操作 (ア) を施してできる多角形を T_2 ， T_2 の各辺に対し操作 (ア) を施してできる多角形を T_3 ，以下同様にして，多角形 T_n から多角形 T_{n+1} を作る。(下の図は左から順に， T_0 ， T_1 ， T_2 をかいたものである。)

(1) 多角形 T_n に含まれる辺の個数 a_n および 1 辺の長さ l_n を，それぞれ n を用いて表せ。

(2) 多角形 T_n の面積 S_n を n を用いて表し， $n \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ。

(3) 多角形 T_n の周の長さ L_n を n を用いて表し， $n \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ。



解説

(1) 1 つの辺につき，1 回の操作で 4 個の辺ができるから

$$a_{n+1} = 4a_n$$

数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_0=3$ 、公比 4 の等比数列より

$$a_n = 3 \cdot 4^n$$

また、多角形 T_n の 1 辺を 3 等分したものが、多角形 T_{n+1} の 1 辺より

$$l_{n+1} = \frac{1}{3} l_n$$

数列 $\{l_n\}$ は初項 $l_0=1$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$$l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(2) 多角形 T_n から多角形 T_{n+1} を作るとき、

1 辺の長さ l_{n+1} の正三角形が a_n 個加わるから

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_n \cdot \frac{1}{2} l_{n+1}^2 \sin 60^\circ \\ &= S_n + 3 \cdot 4^n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= S_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left\{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right\} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{aligned}$$

$n=0$ のときも成り立つ

よって

$$S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$(3) L_n = a_n l_n = 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty$$

例8

AB=4, BC=6, $\angle ABC=90^\circ$ の
 直角三角形 ABC の内部に,
 図のように正方形 $S_1, S_2, \dots,$
 $S_n, \dots$ がある。

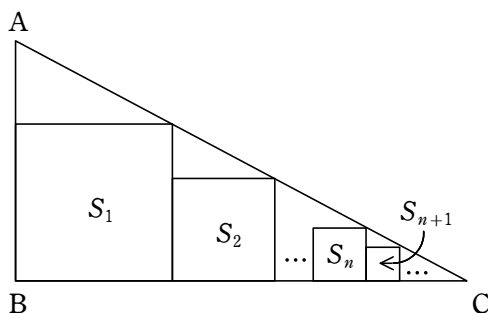
(1) S_1 の 1 辺の長さを求めよ。

(2) S_n の面積を

a_n ($n=1, 2, 3, \dots$) とする。

a_n を n の式で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ の値を求めよ。



解説

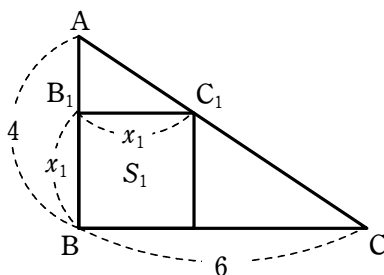
(1) 右図のように B_1, C_1 とおく

S_1 の 1 辺の長さを x_1 とおくと

$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ より

$$AB : AB_1 = BC : B_1C_1$$

$$4 : (4 - x_1) = 6 : x_1 \quad \therefore x_1 = \frac{12}{5}$$



(2) 右図のように C_n, B_{n+1}, C_{n+1} とおく

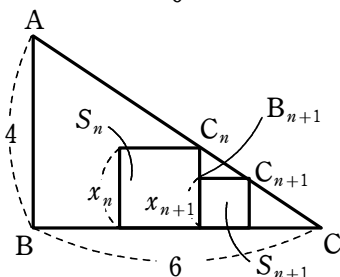
S_n, S_{n+1} の 1 辺の長さをそれぞれ

x_n, x_{n+1} とおくと

$\triangle ABC \sim \triangle C_n B_{n+1} C_{n+1}$ より

$$AB : C_n B_{n+1} = BC : B_{n+1} C_{n+1}$$

$$4 : (x_n - x_{n+1}) = 6 : x_{n+1} \quad \therefore x_{n+1} = \frac{3}{5} x_n$$



$\{x_n\}$ は, 初項 $x_1 = \frac{12}{5}$, 公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列より

$$x_n = \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \quad \therefore a_n = x_n^2 = \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}^2 = 16 \left(\frac{9}{25} \right)^n$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{16 \cdot \frac{9}{25}}{1 - \frac{9}{25}} = 9$$

例9

辺の長さが1の正三角形ABCに対して、円 $S_1, S_2, S_3, \dots$ を次のように定める。

- (A) $\triangle ABC$ に内接する円を S_1 とする。
- (B) 線分AB, 線分ACと円 S_1 に接する円を S_2 とする。
- (C) 線分AB, 線分ACと円 S_2 に接する円で S_1 以外のものを S_3 とする。
- (D) 線分AB, 線分ACと円 S_3 に接する円で S_2 以外のものを S_4 とする。
- (E) 以下同様に円 $S_5, S_6, \dots$ を定める。

(1) 円 S_1 の面積 m_1 を求めよ。

(2) 円 S_2 の面積 m_2 を求めよ。

(3) 円 S_n ($n=1, 2, 3, \dots$)の面積を m_n とするととき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} m_n$ の和を求めよ。

解説

円 S_n の中心を O_n , 半径を r_n とする

(1) $\triangle ABC = \triangle O_1AB + \triangle O_1BC + \triangle O_1CA$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot 1$$

$$\frac{3}{2} r_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \therefore r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって, $m_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{\pi}{12}$

(2) O_2 を通り, ACに平行な直線と O_1 からACに下ろした垂線の交点を H_1 とする

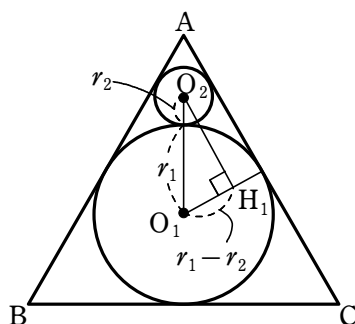
$\triangle O_1O_2H_1$ において, $\angle O_1O_2H_1 = \frac{\pi}{6}$ より

$$O_1O_2 \sin \frac{\pi}{6} = O_1H_1$$

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = r_1 - r_2 \quad \therefore r_2 = \frac{1}{3} r_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって, $m_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{18} \right)^2 = \frac{\pi}{108}$

(3) (2)と同様にして, $r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$



数列 $\{r_n\}$ は初項 $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$$r_n = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$m_n = \pi r_n^2 = \pi \left\{ \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}^2 = \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{12} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{\pi}{12}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{32} \pi$$

補1

$n \geq 1$ のとき, n が奇数のとき $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, n が偶数のとき $a_{n+1} = a_n$, $a_1 = 3$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{}$ となる.

解説

m を自然数とすると

$$a_{2m} = \frac{1}{3}a_{2m-1}, a_{2m+1} = a_{2m}$$

これらより

$$a_{2m+1} = \frac{1}{3}a_{2m-1}$$

$\{a_{2m-1}\}$ は初項 $a_1 = 3$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$$a_{2m-1} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}, a_{2m} = \frac{1}{3}a_{2m-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-2}$$

よって

$$\begin{aligned} S_{2m+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m+1} = a_1 + 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\ &= 3 + 2\left\{1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\right\} = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

$$S_{2m} = S_{2m+1} - a_{2m+1} = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = 6 \text{ より, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 6$$

補2

次の循環小数の積を 1 つの既約分数で表せ.

$$0.\dot{1}\dot{2} \times 0.\dot{2}\dot{7}$$

解説

$$0.\dot{1}\dot{2} \times 0.\dot{2}\dot{7} = 0.121212\cdots \times 0.272727\cdots$$

$$= (0.12 + 0.0012 + \cdots) \times (0.27 + 0.0027 + \cdots)$$

$$= \frac{0.12}{1-0.01} \times \frac{0.27}{1-0.01} = \frac{12}{99} \times \frac{27}{99} = \frac{4}{33} \times \frac{3}{11} = \frac{4}{11} \times \frac{1}{11} = \frac{4}{121}$$