

第2章 2次関数

2.1 2次方程式

(1) 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数) は、左辺を平方完成をして、整理すると、

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

となる。数の範囲を複素数まで拡張すると、 $b^2 - 4ac < 0$ の場合も平方根を考えることができるようになったので、

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

とすることができる。よって、実数を係数とする2次方程式は、複素数の範囲で常に解をもち、次の解の公式が得られる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数) の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

【注】 $b^2 - 4ac = 0$ のとき、 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x = -\frac{b}{2a}$ であり、

$b^2 - 4ac < 0$ のとき、 $\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = \pm\sqrt{-(b^2 - 4ac)}i$ と置き換える。

例1

2次方程式 $2x^2 - 5x + 4 = 0$ を解け。

解説

2次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{4} \end{aligned}$$

次の公式も覚えておくと便利である。

2 次方程式の解の公式 2

2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ (a, b', c は実数) の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

すなわち、整数係数の 2 次方程式の x の係数が特に偶数の場合、この公式は便利である。 $ax^2+2b'x+c=0$ に解の公式を適用すると、

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

となり、必ず約分できる。

例2

(1) 2 次方程式 $2x^2 - 4x - 1 = 0$ を解け。

(2) 2 次方程式 $-\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = 0$ の解を求めよ。

解説

$$(1) x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

(2) 両辺に -4 をかけて

$$x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{4 - 12} = 2 \pm 2\sqrt{2}i$$

(2) 2 次方程式の解の種類の判別

以後、特に断りがない場合、方程式の係数はすべて実数とし、方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする。

方程式の解のうち、実数であるものを**実数解**といい、虚数であるものを**虚数解**という。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であるから、

解の種類は、根号内の式 $b^2 - 4ac$ の符号で判別できる。

(i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき

解は $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であり、これらは異なる2つの実数解である。

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき

解は $x = -\frac{b}{2a}$ であり、これはただ1つの実数解である。この場合は、2つの解が重なったものと考えて、この実数解を重解という。

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき、

解は $x = \frac{-b + \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}, \frac{-b - \sqrt{-(b^2 - 4ac)}i}{2a}$ であり、これらは異なる2つの虚数解である。

$b^2 - 4ac$ を2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式といい、ふつう D で表す。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解と判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号について、次のことが成り立つ。

$D > 0 \Leftrightarrow$ 異なる2つの実数解をもつ
 $D = 0 \Leftrightarrow$ ただ1つの実数解(重解)をもつ
 $D < 0 \Leftrightarrow$ 異なる2つの虚数解をもつ

特に、「 $D \geq 0 \Leftrightarrow$ 実数解をもつ」が成り立つ。なお、2次方程式の異なる2つの虚数解は、互いに共役な複素数である。

2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ においては、 $D = 4(b'^2 - ac)$ であるから、 D の代わりに $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ を用いて、解の種類を判別できる。

☐ 記号 $\Leftrightarrow$ は、 $\rightarrow$ と $\leftarrow$ の両方が成り立つことを表す。

いま、「 $D > 0 \Leftrightarrow$ 異なる2つの実数解をもつ」としたが、

「 $D > 0 \rightarrow$ 異なる2つの実数解をもつ」の逆「異なる2つの実数解をもつ $\rightarrow D > 0$ 」も成り立つ。証明は後の **発展** で扱う。

例3

x についての2次方程式 $x^2 + x + k = 0$ の解の種類を判別せよ。

解説

$x^2 + x + k = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 1 - 4k$$

$D > 0$ すなわち $k < \frac{1}{4}$ のとき，異なる 2 つの実数解をもつ

$D = 0$ すなわち $k = \frac{1}{4}$ のとき，重解をもつ

$D < 0$ すなわち $k > \frac{1}{4}$ のとき，異なる 2 つの虚数解をもつ

例4

(1) 2 次方程式 $x^2 + (2 - 4k)x + k + 1 = 0$ が正の重解をもつとする。このとき，定数 k の値は $k = \overset{\text{ア}}{\boxed{}}$ であり，2 次方程式の重解は $x = \overset{\text{イ}}{\boxed{}}$ である。

(2) $(a + 1)x^2 + 2ax + 2 = 0$ を満たす x の値がただ 1 つであるとき，定数 a の値を求めよ。

解説

(1) 与えられた方程式は， $x^2 + 2(1 - 2k)x + k + 1 = 0$
この判別式を D とすると，方程式が重解をもつとき，

$D = 0$ であるから， $\frac{D}{4} = 0$ より

$$(1 - 2k)^2 - (k + 1) = 0$$

$$4k^2 - 5k = 0$$

$$k(4k - 5) = 0 \quad \therefore k = 0, \frac{5}{4}$$

重解は， $x = -\frac{2 - 4k}{2 \cdot 1} = 2k - 1$

$k = 0$ のとき， $x = -1$ (不適)， $k = \frac{5}{4}$ のとき， $x = \frac{3}{2}$

よって， $k = \overset{\text{ア}}{\frac{5}{4}}$ のとき， $x = \overset{\text{イ}}{\frac{3}{2}}$

(2) (i) $a = -1$ のとき

与えられた方程式は， $-2x + 2 = 0$

これを満たす x の値はただ 1 つである

(ii) $a \neq -1$ のとき

与えられた方程式は 2 次方程式で、その判別式を D とすると、
方程式を満たす x の値がただ 1 つであるとき、

$D=0$ であるから、 $\frac{D}{4}=0$ より

$$a^2 - (a+1) \cdot 2 = 0$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$\therefore a = 1 \pm \sqrt{3}$$

(i), (ii) より、 $a = -1, 1 \pm \sqrt{3}$

(3) 2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α, β とするとき、 $P(x) = ax^2 + bx + c$ とすると、 $P(\alpha) = 0, P(\beta) = 0$ であるから、因数定理より、 $P(x)$ は $x - \alpha, x - \beta$ を因数にもつ。よって、 $P(x)$ が 2 次式であることと、 x^2 の係数が a であることを考えれば、

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる。今までは、 α, β を有理数の範囲で考えてきたが、 α, β が無理数や虚数 (α, β が実数、複素数の範囲) でも同様に因数分解できる。

2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

例5

(1) $x^2 + 5x - 2$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

(2) $5x^2 - 2x + 3$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

解説

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ を解くと $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$ より

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 2 &= \left(x - \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}\right) \\ &= \left(x - \frac{5 - \sqrt{33}}{2}\right) \left(x - \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right) \end{aligned}$$

(2) $5x^2 - 2x + 3 = 0$ を解くと $x = \frac{1 \pm \sqrt{14}i}{5}$ より

$$5x^2 - 2x + 3 = 5\left(x - \frac{1 + \sqrt{14}i}{5}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{14}i}{5}\right)$$

例6

4 次式 $x^4 - x^2 - 6$ を係数が (1) 有理数, (2) 実数, (3) 複素数の範囲で因数分解せよ.

(解説)

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x^2 - 3) \quad (1)$$

$$= (x^2 + 2)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \quad (2)$$

$$= (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \quad (3)$$

(4) 2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α, β とすると, 前節で学んだように, α, β が複素数の範囲で,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる。

両辺 a で割って,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha)(x - \beta)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

これがすべての x について成り立てばよいから,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

となり, これを解と係数の関係という。

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解を α, β とするとき,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例7

2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の 2 つの解を α, β とするとき, $\alpha^2+\beta^2, \alpha^5+\beta^5$ の値を求めよ。

解説

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=2$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot 2=-3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-1)^3-3\cdot 2\cdot (-1)=-1+6=5$$

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta) \\ &=(-3)\cdot 5-2^2\cdot (-1)=-15+4=-11\end{aligned}$$

別解 次数下げを利用。

α は $x^2+x+2=0$ の解より,

$$\alpha^2+\alpha+2=0 \quad \therefore \alpha^2=-\alpha-2$$

よって

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(-\alpha-2)=-\alpha^2-2\alpha=-(-\alpha-2)-2\alpha=-\alpha+2$$

$$\alpha^4=\alpha\alpha^3=\alpha(-\alpha+2)=-\alpha^2+2\alpha=-(-\alpha-2)+2\alpha=3\alpha+2$$

$$\alpha^5=\alpha\alpha^4=\alpha(3\alpha+2)=3\alpha^2+2\alpha=3(-\alpha-2)+2\alpha=-\alpha-6$$

同様に

$$\beta^5=-\beta-6$$

よって

$$\alpha^5+\beta^5=(-\alpha-6)+(-\beta-6)=-(\alpha+\beta)-12=-(-1)-12=-11$$

整式の割り算を利用してもよい。

$$x^5=(x^2+x+2)(x^3-x^2-x+3)-x-6$$

$x=\alpha$ のとき, $\alpha^2+\alpha+2=0$ より

$$\alpha^5=-\alpha-6$$

同様にして, $\beta^5=-\beta-6$ より, あとは同じ。

(5) 2 数を解とする 2 次方程式

2 数 α, β を 2 解とする 2 次方程式は, 一般に

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0, \text{ ただし } a \neq 0$$

と表せる。このうち, 特に $a=1$ であるものは

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0, \text{ すなわち } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

よって, 次のことが成り立つ。

2 数を 2 解とする 2 次方程式

2 数 α, β に対して, $p = \alpha + \beta, q = \alpha\beta$ とすると, α と β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - px + q = 0$$

例8

2 次方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の 2 つの解が α, β であるとき, x の 2 次の項の係数が 1 である x の 2 次方程式で α^2, β^2 を 2 つの解とするものは, $x^2 - \overset{\text{ア}}{\square}x + \overset{\text{イ}}{\square} = 0$ であり, α^4, β^4 を 2 つの解とするものは, $x^2 - \overset{\text{ウ}}{\square}x + \overset{\text{エ}}{\square} = 0$ である.

解説

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2$$

α^2, β^2 を 2 つの解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$$

ここで,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 2 = 12$$

$$\alpha^2\beta^2 = 4$$

より

$$x^2 - \overset{\text{ア}}{12}x + \overset{\text{イ}}{4} = 0$$

同様に

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 12^2 - 2 \cdot 4 = 136$$

$$\alpha^4\beta^4 = 4^2 = 16$$

より, α^4, β^4 を 2 つの解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2 - \overset{\text{ウ}}{136}x + \overset{\text{エ}}{16} = 0$$

【注】2 次方程式の「1 つ」と書くのは, 両辺を同じ定数倍した方程式は, 同じ解をもつからである。例えば, $x^2 - 12x + 4 = 0$ の両辺を 2 倍した $2x^2 - 24x + 8 = 0$ も同じ解をもつ。

例9

和が5, 積が2である2数を求めよ。

(解説)

和が5, 積が2である2数を α, β とすると,

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 2$$

α, β は

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

の2解より

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

よって, 求める2数は $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ と $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$

例10

連立方程式 $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = a + 4 \end{cases}$ が実数解をもつ必要十分条件は $\boxed{} \leq a$
 $\leq \boxed{}$ である.

(解説)

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ より

$$xy = \frac{(x + y)^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \frac{a^2 - (a + 4)}{2} = \frac{a^2 - a - 4}{2}$$

x, y は

$$t^2 - at + \frac{a^2 - a - 4}{2} = 0$$

の2解であり, これが実数解をもてばよいから,

判別式を D として, $D \geq 0$ より

$$a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - a - 4}{2} \geq 0$$

$$a^2 - 2a - 8 \leq 0$$

$$(a + 2)(a - 4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 4$$

【注】2次不等式については, 後で扱う。

(6) 2 次方程式の実数解の符号

2 つの実数 α, β について、次のことが成り立つ。

$$\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha \text{ と } \beta \text{ が異符号} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$$

したがって、2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解 α, β と、判別式 D について、次のことが成り立つ。

$$\alpha, \beta \text{ は異なる 2 つの正の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で, } \alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ は異なる 2 つの負の解} \Leftrightarrow D > 0 \text{ で, } \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ は異符号の解} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$$

〔注〕 $\alpha\beta < 0$ ならば、 $\frac{c}{a} < 0$ より $ac < 0$ であるから、 $D = b^2 - 4ac > 0$ が成り立つ。

例11

x についての 2 次方程式 $x^2 - 2px + 2p + 1 = 0$ が次のような異なる 2 つの実数解をもつとき、定数 p の値の範囲を求めよ。ただし、 p は実数とする。

- (1) 2 つの解がともに正 (2) 2 つの解がともに負
(3) 1 つの解が正、他の解が負

解説

(1) $x^2 - 2px + 2p + 1 = 0$ の判別式を D ，異なる 2 つの実数解を α, β とすると，

$$\frac{D}{4} = p^2 - (2p + 1) = p^2 - 2p - 1$$

また、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2p, \alpha\beta = 2p + 1$$

$D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ より

$$p^2 - 2p - 1 > 0, 2p > 0, 2p + 1 > 0$$

$$\therefore p > 1 + \sqrt{2}$$

(2) $D > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$ より

$$p^2 - 2p - 1 > 0, 2p < 0, 2p + 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < p < 1 - \sqrt{2}$$

(3) $\alpha\beta < 0$ より

$$2p + 1 < 0 \quad \therefore p < -\frac{1}{2}$$

補1

x, y に関する 2 次式 $x^2 + xy - 2y^2 - 3x + ky + 2$ が x, y の 1 次式の積に因数分解できるとする. このとき

- (1) 定数 k の値を求めよ.
- (2) 与えられた式を因数分解せよ.

解説

- (1) $x^2 + xy - 2y^2 - 3x + ky + 2 = 0$ とおく.

$$x^2 + (y-3)x - 2y^2 + ky + 2 = 0$$

これを x の方程式とみて, 解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(y-3) \pm \sqrt{(y-3)^2 - 4(-2y^2 + ky + 2)}}{2} \\ &= \frac{-(y-3) \pm \sqrt{9y^2 - 2(2k+3)y + 1}}{2} \end{aligned}$$

$9y^2 - 2(2k+3)y + 1$ が完全平方式となればよいから,

$9y^2 - 2(2k+3)y + 1 = 0$ の判別式を D として

$$D = (2k+3)^2 - 9 = 4k^2 + 12k = 4k(k+3) = 0 \quad \therefore k = 0, -3$$

- (2) (i) $k=0$ のとき

$$x = \frac{-(y-3) \pm \sqrt{9y^2 - 6y + 1}}{2} = \frac{-(y-3) \pm |3y-1|}{2} = y+1, -2y+2$$

よって

$$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + ky + 2 = (x - y - 1)(x + 2y - 2)$$

- (ii) $k=-3$ のとき

$$x = \frac{-(y-3) \pm \sqrt{9y^2 + 6y + 1}}{2} = \frac{-(y-3) \pm |3y+1|}{2} = y+2, -2y+1$$

よって

$$x^2 + xy - 2y^2 - 3x + ky + 2 = (x - y - 2)(x + 2y - 1)$$

補2

2 次方程式 $x^2+3x+7=0$ の 2 つの解を α, β とおく。

このとき, $A=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, $B=2\alpha^4+15\beta^3$ の値を計算すると,

$A=\overset{7}{\square}$, $B=\overset{1}{\square}$ と求まる。

(解説)

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=7$$

よって

$$A=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=(-3)^2-7=\overset{7}{2}$$

$\alpha^2+3\alpha+7=0$ から, $\alpha^2=-3\alpha-7$ より

$$\alpha^4=(-3\alpha-7)^2=9\alpha^2+42\alpha+49$$

$$=9(-3\alpha-7)+42\alpha+49=15\alpha-14$$

$\beta^2=-3\beta-7$ より

$$\beta^3=-3\beta^2-7\beta=-3(-3\beta-7)-7\beta=2\beta+21$$

よって

$$B=2(15\alpha-14)+15(2\beta+21)$$

$$=30(\alpha+\beta)+287=30\times(-3)+287=\overset{1}{197}$$

補3

- (1) 2 次方程式 $x^2 - kx - 18 = 0$ の解の 1 つが $x = 3$ のとき, k の値と他の解を求めよ.
- (2) a, b を有理数とする. 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 1 つの解が $1 + \sqrt{3}$ であるとき a, b の値を求めよ.
- (3) 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ (a, b は実数の定数) の 1 つの解が $2 + \sqrt{3}i$ (ただし, $i^2 = -1$) であるとき, a, b の値を求めよ.

解説

- (1) $x = 3$ を解にもつから

$$3^2 - 3k - 18 = 0 \quad \therefore k = -3$$

このとき

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x - 3)(x + 6) = 0 \quad \therefore x = 3, -6$$

よって, 他の解は $x = -6$

別解

$x^2 - kx - 18 = 0$ の 3 以外の解を α とすると
解と係数の関係より

$$3 + \alpha = k, \quad 3\alpha = -18$$

$$\therefore \alpha = -6, \quad k = -3$$

- (2) $x = 1 + \sqrt{3}$ を解にもつから

$$(1 + \sqrt{3})^2 + a(1 + \sqrt{3}) + b = 0$$

$$a + b + 4 + (a + 2)\sqrt{3} = 0$$

$a + b + 4, a + 2$ は有理数より

$$a + b + 4 = 0, \quad a + 2 = 0 \quad \therefore a = -2, \quad b = -2$$

別解

係数が有理数であり, $x = 1 + \sqrt{3}$ を解にもつから
 $x = 1 - \sqrt{3}$ も解にもつ

よって

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\} \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

したがって (これが恒等式となればよいから)

$$a = -2, \quad b = -2$$

(3) $x=2+\sqrt{3}i$ を解にもつから

$$(2+\sqrt{3}i)^2+a(2+\sqrt{3}i)+b=0$$

$$(2a+b+1)+(a+4)\sqrt{3}i=0$$

$2a+b+1$, $a+4$ は実数より

$$2a+b+1=0, (a+4)\sqrt{3}=0 \quad \therefore a=-4, b=7$$

別解

係数が実数であり, $x=2+\sqrt{3}i$ を解にもつから

共役複素数 $2-\sqrt{3}i$ も解にもつ

よって

$$\begin{aligned}x^2+ax+b &= \{x-(2+\sqrt{3}i)\}\{x-(2-\sqrt{3}i)\} \\ &= x^2-4x+7\end{aligned}$$

したがって

$$a=-4, b=7$$

注 (2) の**別解**について, $x^2+ax+b=0$ の a, b が有理数のとき, $x=1+\sqrt{3}$ を解にもてば $x=1-\sqrt{3}$ も解にもつが, a, b が実数のとき, この命題は必ずしも成り立たない。一般に, a, b が有理数のとき, $x^2+ax+b=0$ が $x=p+q\sqrt{r}$ (p, q は有理数, r は平方数でない有理数) を解にもてば $x=p-q\sqrt{r}$ も解にもつが, a, b が実数のときは $x=p-q\sqrt{r}$ も解にもつことの証明は代入して計算すればできる。 $k+l\sqrt{2}=0$ について, k, l が有理数のときは $k=l=0$ のみであるが, k, l が実数のときはこれを満たす k, l は $k=l=0$ の他にいくらでもある。反例を1つ挙げておく。

反例

方程式 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ を解け。

解説

解の公式より

$$x = \frac{-(-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-1)}}{1} = \sqrt{3} \pm 2$$

注 $2+\sqrt{3}$ は解にもつが $2-\sqrt{3}$ は解にもたない。

(3) も a, b が複素数のとき, $x^2+ax+b=0$ が $2-\sqrt{3}i$ を解にもつとは限りません。

補4

(1) 異なる2つの2次方程式 $x^2+2ax+10=0$, $x^2+5x+4a=0$ が共通の解をもつとき、定数 a の値は ア であり、そのときの共通の解は $x = \text{イ}$ である。

(2) 2つの2次方程式 $x^2-3x+k-1=0$, $x^2+(k-2)x-2=0$ が、共通の実数解をただ1つもつとする。このとき、 k の値は ア であり、その共通解は イ である。

解説

共通の解を α とおくと

$$\alpha^2+2a\alpha+10=0 \cdots \text{①}$$

$$\alpha^2+5\alpha+4a=0 \cdots \text{②}$$

①-②より

$$(2a-5)\alpha+10-4a=0$$

$$(2a-5)(\alpha-2)=0 \quad \therefore a=\frac{5}{2} \text{ または } \alpha=2$$

(i) $a=\frac{5}{2}$ のとき

2つの方程式はともに $x^2+5x+10=0$ となり、

2つの方程式が異なることに反する

よって、不適

(ii) $\alpha=2$ のとき

①より

$$4+4a+10=0 \quad \therefore a=-\frac{7}{2}$$

このとき、2つの2次方程式は $x^2-7x+10=0$, $x^2+5x-14=0$ となり異なる

(i), (ii)より

$$a=\text{ア} -\frac{7}{2}, \text{ 共通の解は } x=\text{イ} 2$$

(2) 共通の解を α とすると

$$\alpha^2-3\alpha+k-1=0 \cdots \text{①}$$

$$\alpha^2+(k-2)\alpha-2=0 \cdots \text{②}$$

②-①より

$$(k+1)\alpha - (k+1) = 0$$

$$(k+1)(\alpha-1) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ または } \alpha = 1$$

(i) $k = -1$ のとき

2つの方程式はともに $x^2 - 3x - 2 = 0$ となり,

共通の解が2個となるので不適

(ii) $\alpha = 1$ のとき

①より $k = 3$

このとき, 2つの方程式は $x^2 - 3x + 2 = 0, x^2 + x - 2 = 0$ となり,

共通解は $x = 1$ のみとなる

(i), (ii)より

k の値は $\text{ }^{\circ}3$, 共通解は $\text{ }^{\circ}1$

補5

次を満たす x, y, z を求めよ.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 25 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 109 \end{cases}$$

(解説)

$$x + y - z = 1 \text{ より, } x + y = z + 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 25 \text{ より}$$

$$(x + y)^2 - 2xy = z^2 + 25$$

$$2xy = (z + 1)^2 - z^2 - 25 \quad \therefore xy = z - 12$$

$$x^3 + y^3 - z^3 = 109 \text{ より}$$

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = z^3 + 109$$

$$(z + 1)^3 - 3(z - 12)(z + 1) = z^3 + 109$$

$$36z - 72 = 0 \quad \therefore z = 2$$

このとき, $x + y = 3, xy = -9$ であるから, x, y は

$$t^2 - 3t - 9 = 0$$

の2解より

$$(x, y) = \left(\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \right)$$

補6

x の 2 次方程式 $kx^2 + 8kx + 3k - 9 = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β をもつとき、次の問いに答えよ。

(1) $|\alpha - \beta| = 8$ のとき、 $k = \boxed{}$ となる。

(2) $8 < |\alpha - \beta| < 10$ のとき、 $\boxed{} < k < \boxed{}$ となる。

(3) $8 < |\alpha - \beta| < 10$ を満たし、 $|\alpha| + |\beta|$ が整数になるとき、 $k = \boxed{}$ となる。

解説

$kx^2 + 8kx + 3k - 9 = 0 \dots \textcircled{1}$ とする

$\textcircled{1}$ は 2 次方程式より、 $k \neq 0$

$\textcircled{1}$ は異なる 2 つの実数解をもつから、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (4k)^2 - k(3k - 9) = 13k^2 + 9k = k(13k + 9) > 0$$

$$\therefore k < -\frac{9}{13}, 0 < k$$

$\textcircled{1}$ の 2 つの解を α, β とすると、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = \frac{3(k-3)}{k}$$

(1) $|\alpha - \beta| = 8$ より

$$(\alpha - \beta)^2 = 64$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-8)^2 - 4 \cdot \frac{3(k-3)}{k} = \frac{52k+36}{k} \text{ より}$$

$$\frac{52k+36}{k} = 64 \quad \therefore k = 3$$

(2) $8 < |\alpha - \beta| < 10$ より

$$64 < (\alpha - \beta)^2 < 100$$

$$64 < \frac{52k+36}{k} < 100$$

各辺に $k^2 (>0)$ を掛けて

$$64k^2 < k(52k+36) < 100k^2$$

$64k^2 < k(52k+36)$ より

$$12k(k-3) < 0 \quad \therefore 0 < k < 3$$

$k(52k+36) < 100k^2$ より

$$12k(4k-3) > 0 \quad \therefore k < 0, \quad \frac{3}{4} < k$$

よって

$${}^{\text{イ}} \frac{3}{4} < k < {}^{\text{ウ}} 3$$

(3) $\frac{3}{4} < k < 3$ のとき, $\alpha\beta < 0$ より

2 次方程式 ① は異符号の解をもつ。

よって, $\alpha < 0 < \beta$ とすると, $|\alpha| + |\beta| = -\alpha + \beta$

$|\alpha| + |\beta|$ が整数となるとき, $-\alpha + \beta$ も整数で, $|\alpha - \beta|$ も整数となる

$8 < |\alpha - \beta| < 10$ を満たす整数は, $|\alpha - \beta| = 9$ より

$$(\alpha - \beta)^2 = 81$$

$$\frac{52k + 36}{k} = 81 \quad \therefore k = \frac{\pm 36}{29}$$

補7

x の 2 次方程式 $x^2 - (k-2)x + 2k = 0$ の解が次のようであるとき, 定数 k の値を求めよ。

(1) 2 つの解の差が 1

(2) 2 つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$

解説

(1) $x^2 - (k-2)x + 2k = 0$ の 2 つの解を $\alpha, \alpha+1$ とすると,
解と係数の関係より

$$2\alpha + 1 = k - 2, \quad \alpha(\alpha + 1) = 2k$$

これらから k を消去して

$$\alpha(\alpha + 1) = 2(2\alpha + 3)$$

$$\alpha^2 - 3\alpha - 6 = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \quad \therefore k = 6 \pm \sqrt{33}$$

別解

2 次方程式 $x^2 - (k-2)x + 2k = 0$ の 2 つの解を α, β とすると,
解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = k - 2, \quad \alpha\beta = 2k$$

2 つの解の差が 1 であるとき, $\alpha - \beta = \pm 1$ すなわち $(\alpha - \beta)^2 = 1$ のとき
より

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$(k-2)^2-8k=1$$

$$k^2-12k+3=0 \quad \therefore k=6\pm\sqrt{33}$$

(2) この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(k-2)^2-8k=k^2-12k+4$$

実数解をもつための条件は $D\geq 0$ より

$$k\leq 6-4\sqrt{2}, \quad 6+4\sqrt{2}\leq k \cdots \textcircled{1}$$

$$|\alpha|+|\beta|=2\sqrt{2} \iff (|\alpha|+|\beta|)^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\iff \alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta|=8$$

$$\iff (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=8 \text{ より}$$

$$(k-2)^2-4k+4|k|=8$$

$$k^2-8k+4|k|-4=0$$

(i) $k\geq 0$ のとき

$$k^2-4k-4=0 \quad \therefore k=2\pm 2\sqrt{2}$$

$$k\geq 0 \text{ より, } k=2+2\sqrt{2}$$

これは①を満たさない

(ii) $k<0$ のとき

$$k^2-12k-4=0 \quad \therefore k=6\pm 2\sqrt{10}$$

$$k<0 \text{ より, } k=6-2\sqrt{10}$$

これは①を満たす

$$\text{以上より, } k=6-2\sqrt{10}$$

発展 判別式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解と、その判別式 $D=b^2-4ac$ について、

$D>0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0 \Leftrightarrow$ 重解をもつ

$D<0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

それぞれ $\rightarrow$ については示したが、 $\leftarrow$ については示していないので、ここで示す。証明は、2 次関数のグラフを利用する方法と、転換法という証明法を利用する方法と 2 通りある。グラフを利用する方法は 2 次関数のグラフを学習してから考えることにして、ここでは転換法を利用して証明する。まず、転換法について、

転換法

命題 $p_1 \rightarrow q_1, p_2 \rightarrow q_2, \dots, p_n \rightarrow q_n$ が成り立ち、

仮定 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ですべての場合を尽くして、

結論 $q_1, q_2, \dots, q_n$ のどの 2 つも同時に満たす要素はないとき、

これらの逆命題 $q_1 \rightarrow p_1, q_2 \rightarrow p_2, \dots, q_n \rightarrow p_n$ はすべて成り立つ

$q_1 \rightarrow p_1$ が成り立つことを示す。

q_1 が成り立つとき、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ですべての場合を尽くしているから、これらのどれかが成り立つ。

ここで、 p_1 以外の $p_2, \dots, p_n$ のどれかが成り立つとすると、

例えば、 p_2 が成り立つとすれば、仮定から $p_2 \rightarrow q_2$ なので、

q_1 と q_2 が同時に成り立ち、 $q_1, q_2, \dots, q_n$ のどの 2 つも同時に満たす要素はないということに矛盾する。

よって、背理法により、 $q_1 \rightarrow p_1$ が成り立つ。

$q_2 \rightarrow p_2, \dots, q_n \rightarrow p_n$ も同様にして成り立つ。

これを利用すれば、

$D>0, D=0, D<0$ で、 D についてすべての場合を尽くして、

異なる 2 つの実数解をもつ、重解をもつ、異なる 2 つの実数解をもつはどの 2 つも同時に起こることはないので、逆命題はすべて成り立つことが示される。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ $\rightarrow D>0$

について示す。まず、

$D>0 \rightarrow$ 異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0 \rightarrow$ 重解をもつ

$D<0 \rightarrow$ 異なる 2 つの虚数解をもつ

が成り立つことはすべて示してあるので、これらを仮定し、

$D>0, D=0, D<0$ で、 D についてすべての場合を尽くしているので、

$ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、

$D>0, D=0, D<0$ のどれかが成り立つ。

ここで、

$D=0$ が成り立つとすると、仮定より重解をもち、

異なる 2 つの実数解をもつということと、重解をもつということが同時に起こってしまい矛盾する。

$D<0$ が成り立つとしても、同様に矛盾が起きる。

よって、 $D>0$ となる。

他の 2 つの逆命題が成り立つしくみも同様である。

背理法という証明法を利用しているので、集合と論理を学習してからもう一度確認して欲しい。