

1.6 実数

(1) 有理数

自然数 $1, 2, 3, \dots$ に 0 と負の整数 $-1, -2, -3, \dots$ とを合わせて整数という。また、整数 m と自然数 n を用いて $\frac{m}{n}$ の形に表される数を有理数という。整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるので有理数である。

小数第何位かで終わる小数を有限小数という。これに対して、小数部分が無限に続く小数を無限小数という。無限小数のうち、いくつかの数字の配列が繰り返されるものを循環小数という。有理数について、一般に次のことが知られている。

x は有理数である $\Leftrightarrow x$ は整数か有限小数か循環小数である

→ について、 $x = \frac{m}{n}$ (m は自然数、 n を整数) とする。

商が整数部分で割り切れれば x は整数である。商が整数部分で割り切れないとき、割り算をくり返し実行して途中で余りが 0 になれば x は有限小数であり、途中で余りが 0 になることがなければ、 m を n で割るとき余りは 0 から $n-1$ までの n 通りであるから、多くとも n 回割り算をくり返せばどこかで必ず同じ余りが出てくるので、そこから先は繰り返しとなり、 x は循環小数である (この論法を鳩ノ巣原理といいます)。← については、整数や有限小数については明らかです。循環小数については次のように考えます。例えば、 $2.\dot{6}\dot{3}$ ($2.636363\dots$) を既約分数で表します。

$$x = 2.\dot{6}\dot{3} \text{ とおくと, } 100x = 263.\dot{6}\dot{3}$$

$$100x - x = 261$$

よって

$$x = \frac{261}{99} = \frac{29}{11}$$

これを一般的に考えればよい。このようにして、循環小数は、必ず既約分数で表されるので有理数である。循環小数を無限等比級数の和と考えても示すことができる。

(2) 実数

整数と有限小数または無限小数で表される数すべてを合わせたものを**実数**という。実数のうち有理数でないものを**無理数**といいます。既に学んだように、 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ などは無理数である。有理数は、整数、有限小数、循環小数のいずれかで表される数であるから、無理数は循環しない無限小数で表される数である。

直線上に基準となる点 O をとり、単位の長さや正の向きを定める。正の向きを右にすると、この直線上の点 P に対して、次のように実数に対応させることができる。

P が O の右側にあり、 OP の長さが a のとき、正の実数 a

P が O の左側にあり、 OP の長さが a のとき、負の実数 $-a$

このように、直線上の各点に1つの実数に対応させるとき、この直線を**数直線**といい、 O をその**原点**という。

数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の座標といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す。

逆に、どんな実数 a に対しても、 a を座標に持つ数直線上の点がただ1つ定まる。すなわち、実数はすべて数直線上の点で表される。

実数の大小関係は、数直線上では点の左右の位置関係で表される。

数直線上で原点 O と点 $P(a)$ の間の距離を、実数 a の**絶対値**といい、記号 $|a|$ で表す。0 の絶対値 $|0|=0$ である。例えば、

$$|5|=5, |-2|=-(-2)=2,$$

$$|1+\sqrt{2}|=1+\sqrt{2}, |1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$

のようになるので、次の性質が成り立つ。

絶対値の性質

1. $|a| \geq 0$

$$2. |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例1

$|x-1|-2|3-x|$ を簡単にせよ。

解説

$f(x)=|x-1|-2|3-x|$ とおく

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+1 & (x<1) \end{cases} \quad |3-x|=\begin{cases} 3-x & (x\leq 3) \\ x-3 & (x>3) \end{cases}$$

	1	3	
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$ 3-x $	$3-x$	$3-x$	$x-3$

$x<1$ のとき $f(x)=-x+1-2(3-x)=x-5$

$1\leq x\leq 3$ のとき $f(x)=x-1-2(3-x)=3x-7$

$x>3$ のとき $f(x)=x-1-2(x-3)=-x+5$

例2

$|a|+3b=-2$, $a-2|b|=6$ のとき, $a+b$ の値を求めよ.

解説

$|a|+3b=-2$ より, $3b=-|a|-2$

$b<0$ であるから, $|b|=-b$

また, $a-2|b|=6$ より, $a=2|b|+6$

$a>0$ であるから, $|a|=a$ より

$a+3b=-2$, $a+2b=6$ $\therefore a=22$, $b=-8$

よって, $a+b=14$

絶対値を含む方程式, 不等式について, 次のことが成り立つ。

a が定数のとき

$|f(x)|=a$ ($a\geq 0$) $\Leftrightarrow f(x)=\pm a$ ($a<0$ のときは $|f(x)|\geq 0$ より解なし)

$|f(x)|<a$ ($a>0$) $\Leftrightarrow -a<f(x)<a$

$|f(x)|>a$ ($a>0$) $\Leftrightarrow f(x)<-a, f(x)>a$

例3

(1) 等式 $|2x-3|=5$ を満たす x の値は アイ と ウ である。

(2) 不等式 $\left|x-\frac{3}{2}\right|<\sqrt{6}$ を満たす整数 x の個数は エ である。

(3) n が自然数で, 不等式 $\left|x-\frac{3}{2}\right|<n$ を満たす整数 x の個数が6であるとき, $n=\span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">オ である。$

解説

$$(1) |2x-3|=5$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=\pm 5$$

$$\Leftrightarrow x=\text{アイ}-1, \text{ウ}4$$

注 $2x-3\geq 0$ と $2x-3<0$ で場合分けをして，絶対値を外して解いてもよいが，大変。

$$(2) \left| x - \frac{3}{2} \right| < \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{6} < x - \frac{3}{2} < \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \sqrt{6} < x < \frac{3}{2} + \sqrt{6}$$

ここで， $2.4^2=5.76$ ， $2.5^2=6.25$ であるから， $2.4 < \sqrt{6} < 2.5$ よりこれを満たす整数 x は 0，1，2，3 の エ 4 個

$$(3) \left| x - \frac{3}{2} \right| < n \text{ を満たす整数 } x \text{ は，}$$

数直線上の点 $\frac{3}{2}$ からの距離が n より小さい整数であるから，

n が自然数より，その個数は $2n$ 個になる

よって

$$2n=6 \quad \therefore n=\text{オ}3$$

例4

(1) 方程式 $|x-1|=3x$ の解は， $x=\boxed{\quad}$ である。

(2) 不等式 $|3x-4|<2x$ を解け。

解説

(1) (i) $x\geq 1$ のとき

$$x-1=3x \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$$

これは $x\geq 1$ を満たさない

(ii) $x<1$ のとき

$$-(x-1)=3x \quad \therefore x=\frac{1}{4}$$

これは $x<1$ を満たす

$$(i), (ii) \text{より, } x = \frac{1}{4}$$

別解 例 3 のように, 同値変形により解く

$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$ かつ $g(x) \geq 0$ が成り立つ。

$g(x) \geq 0$ のときは明らかに成り立つ

$g(x) < 0$ のとき, $|f(x)| \geq 0$ より $|f(x)| = g(x)$ は解なし

$f(x) = \pm g(x)$ かつ $g(x) \geq 0$ も解なし ($g(x) < 0$ より)

よって成り立つ。

これを利用して解くと,

$$|x-1| = 3x$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm 3x \text{ かつ } x \geq 0$$

$$x-1 = 3x \text{ のとき, } x = -\frac{1}{2} \text{ (} x < 0 \text{ より不適)}$$

$$x-1 = -3x \text{ のとき, } x = \frac{1}{4}$$

$$\text{以上より, } x = \frac{1}{4}$$

$$(2) |3x-4| < 2x$$

$$(i) 3x-4 \geq 0, \text{ すなわち } x \geq \frac{4}{3} \text{ のとき}$$

$$3x-4 < 2x \quad \therefore x < 4$$

$$x \geq \frac{4}{3} \text{ より, } \frac{4}{3} \leq x < 4$$

$$(ii) 3x-4 < 0, \text{ すなわち } x < \frac{4}{3} \text{ のとき}$$

$$-(3x-4) < 2x \quad \therefore x > \frac{4}{5}$$

$$x < \frac{4}{3} \text{ より, } \frac{4}{5} < x < \frac{4}{3}$$

$$(i), (ii) \text{より } \frac{4}{5} < x < 4$$

別解 例 3 のように, 同値変形により解く

$$\textcircled{1} |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$$

$$\textcircled{2} |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x), f(x) > g(x) \text{ が成り立つ。}$$

①について

$g(x) > 0$ のときは明らかに成り立つ

$g(x) \leq 0$ のとき, $|f(x)| \geq 0$ より $|f(x)| < g(x)$ は解なし

$-g(x) \geq g(x)$ であるから $-g(x) < f(x) < g(x)$ も解なし

よって成り立つ

②について

$g(x) \geq 0$ のときは明らかに成り立つ

$g(x) < 0$ のとき, $|f(x)| \geq 0$ より $|f(x)| > g(x)$ の解は, x は実数全体

$-g(x) > g(x)$ であるから $f(x) < -g(x)$, $f(x) > g(x)$ も実数全体

よって成り立つ

これを利用して解くと,

$$|3x-4| < 2x$$

$$\Leftrightarrow -2x < 3x-4 < 2x$$

$$-2x < 3x-4 \text{ より, } x > \frac{4}{5}$$

$$3x-4 < 2x \text{ より, } x < 4$$

$$\text{よって, } \frac{4}{5} < x < 4$$

(3) 根号を含む式の計算

2乗すると a になる数を, a の平方根という。

正の数 a の平方根は, 正と負の2つあり, それらの絶対値は等しい。

その正の平方根を $\sqrt{a}$ で表す。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である。

また, 0 の平方根は 0 だけであり, $\sqrt{0} = 0$ と定める。

記号 $\sqrt{\quad}$ を根号といい, $\sqrt{a}$ をルート a と読む。

[注] 実数を2乗すると, 0 または正の数となり, 負の数となることはない。

したがって, 負の数の平方根は, 実数の範囲では存在しない。

$\sqrt{a}$ の定義から, 次のことが成り立つ。

$1. a \geq 0 \text{ のとき, } (\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$
--

$\sqrt{a^2}$ について, 例えば次のことが成り立つ。

$$a = 5 \text{ のとき, } \sqrt{a^2} = \sqrt{5^2} = 5 = a$$

$$a = -5 \text{ のとき, } \sqrt{a^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5 = -a$$

一般に, 次のことが成り立つ。

$$2. \begin{cases} \sqrt{a^2} = a \ (a \geq 0) \\ \sqrt{a^2} = -a \ (a < 0) \end{cases} \quad \text{すなわち, } \sqrt{a^2} = |a|$$

例5

次の計算は誤りである。① から ⑥ の等号の中で誤っているものをすべてあげ、誤りと判断した理由を述べよ。

$$\underset{\textcircled{1}}{8} = \underset{\textcircled{2}}{\sqrt{64}} = \underset{\textcircled{3}}{\sqrt{2^6}} = \underset{\textcircled{4}}{\sqrt{(-2)^6}} = \underset{\textcircled{5}}{\sqrt{\{(-2)^3\}^2}} = \underset{\textcircled{6}}{(-2)^3} = -8$$

解説

誤りは⑤

$$\sqrt{\{(-2)^3\}^2} = |(-2)^3|$$

例6

(1) $x = a^2 + 1$, $a = \sqrt{6} - 2$ のとき, $\sqrt{x+2a} + \sqrt{x-2a}$ の値を求めよ。

(2) $\sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{a^2}$ の根号をはずし簡単にせよ。

(3) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ を簡単にすると, $x > 1$ のとき,

$\sqrt{\quad}$ で, $-2 < x < 1$ のとき, $\sqrt{\quad}$ である。

解説

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{x+2a} + \sqrt{x-2a} &= \sqrt{(a^2+1)+2a} + \sqrt{(a^2+1)-2a} \\ &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2} \\ &= |a+1| + |a-1| \\ &= |(\sqrt{6}-2)+1| + |(\sqrt{6}-2)-1| \\ &= |\sqrt{6}-1| + |\sqrt{6}-3| \\ &= (\sqrt{6}-1) - (\sqrt{6}-3) = 2 \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt{(a+2)^2} + \sqrt{a^2} = |a+2| + |a|$$

$$|a+2| = \begin{cases} a+2 & (a \geq -2) \\ -a-2 & (a < -2) \end{cases}, \quad |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \text{ より}$$

$$a < -2 \text{ のとき, (与式)} = -a-2-a = -2a-2$$

$$-2 \leq a < 0 \text{ のとき, (与式)} = a+2-a = 2$$

$$0 \leq a \text{ のとき, (与式)} = a+2+a = 2a+2$$

$$(3) \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+2)^2} = |x-1| - |x+2|$$

$$x > 1 \text{ のとき, (与式)} = x - 1 - (x + 2) = -3$$

$$-2 < x < 1 \text{ のとき, (与式)} = -(x-1) - (x+2) = -2x-1$$

平方根については、次の公式が成り立つ。

平方根の公式

$a > 0, b > 0, k > 0$ のとき

$$3. \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$4. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$5. \sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

分母に根号を含む式を変形して、分母に根号を含まない式にすることを、分母を有理化するという。

例7

$$(1) \frac{5}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \text{ の分母を有理化せよ。}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} \text{ の分母を有理化せよ。}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \text{ (与式)} &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 10\sqrt{2}}{2\sqrt{15}} \\ &= \frac{5\sqrt{45} + 5\sqrt{75} - 10\sqrt{30}}{30} \\ &= \frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{30}}{6} \end{aligned}$$

【注】 $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ の分母の有理化について、

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) &= (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2 \\&= a + 2\sqrt{ab} + b - c \\&= (a + b - c) + 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

より、 $a + b = c$ であれば、 $a + b - c = 0$ となるので簡単になる。

この場合 $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ であり、 $3 + 5 = 8$ であるから、 $a = 3, b = 5, c = 8$ として計算すると簡単にできる。

$$\begin{aligned}(2) \text{ (与式)} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{6}\} \{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{6}\}} \\&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{6} - 1} \\&= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})(2\sqrt{6} + 1)}{(2\sqrt{6} - 1)(2\sqrt{6} + 1)} \\&= \frac{-12 + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{6}}{23}\end{aligned}$$

例8

(1) $\sqrt{7}$ の小数部分を x とするとき、 $2x^3 + 8x^2 - 4x - 3$ の値を求めよ。

(2) $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ のとき、 $4x^3 - 12x^2 + 10x - 1$ の値を求めよ。

(3) 2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解の最大値を a とするとき、 $a^3 + 2a^2 + a + 1$ の値を求めよ

【解説】

(1) $2^2 < 7 < 3^2$ より

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

よって、 $\sqrt{7}$ の整数部分は 2 より

$$x = \sqrt{7} - 2$$

$$x + 2 = \sqrt{7}$$

両辺を 2 乗して

$$x^2 + 4x + 4 = 7$$

$$\therefore x^2 + 4x - 3 = 0$$

$2x^3+8x^2-4x-3$ を x^2+4x-3 で割ったときの商が $2x$, 余りが $2x-3$ より

$$\begin{aligned}2x^3+8x^2-4x-3 &= (x^2+4x-3) \cdot 2x + 2x-3 \\x^2+4x-3 &= 0 \text{ より} \\&= 2x-3 \\&= 2(\sqrt{7}-2)-3 \\&= 2\sqrt{7}-7\end{aligned}$$

(2) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ より

$$\begin{aligned}2x-3 &= \sqrt{5} \\ \text{両辺を 2 乗して} \\4x^2-12x+9 &= 5 \\ \therefore x^2-3x+1 &= 0 \\4x^3-12x^2+10x-1 &= (x^2-3x+1) \cdot 4x + 6x-1 \\x^2-3x+1 &= 0 \text{ より} \\&= 6x-1 \\&= 6 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1 = 8+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

(3) $x^2+x-1=0$ を解くと, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

よって, $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

a は $x^2+x-1=0$ の解より

$$\begin{aligned}a^2+a-1 &= 0 \\a^3+2a^2+a+1 &= (a^2+a-1)(a+1) + a+2 \\a^2+a-1 &= 0 \text{ より} \\&= a+2 \\&= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

2重にルートがかかっている式を，ルートを1つ外すことができる場合がある。

2重根号

$a > b > 0$ のとき

$$1. \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$2. \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} 1. \sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} &= \sqrt{(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \\ &= |\sqrt{a} + \sqrt{b}| \end{aligned}$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ より

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} &= \sqrt{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} \\ &= |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \end{aligned}$$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$ より

$$= \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

とできる。 $a > b$ としておかないと，絶対値を外すときに場合分けが生じるので，はじめから $a > b$ としておいた方がよい。

例9

(1) 次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ を簡単にせよ。

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$ の2重根号をはずせ。

(4) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ を簡単にすると となる。

解説

$$(1) \sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)-2\sqrt{5 \cdot 2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} &= \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4 \cdot 3}}} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt{10-\sqrt{84}} &= \sqrt{10-2\sqrt{21}} \\ &= \sqrt{(7+3)-2\sqrt{7 \cdot 3}} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \\ &= (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \\ &= 2+\sqrt{3} + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + 2-\sqrt{3} \\ &= 4+2=6 \\ &\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} > 0 \text{ より,} \\ &\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

補1

(1) $|x| + 2|x - 1| = x + 3$ を解け.

(2) $|x - 2| + |x - 5| \leq 5$ を満たす実数 x の値の範囲を求めよ.

解説

$$(1) |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & (x \geq 1) \\ -(x - 1) & (x < 1) \end{cases}$$

	0	1	
$ x $	$-x$	x	x
$ x - 1 $	$-(x - 1)$	$-(x - 1)$	$x - 1$
$ x + 2 x - 1 $	$-3x + 2$	$-2x + 2$	$3x - 2$

$|x| + 2|x - 1| = x + 3$ の解は,

$y = |x| + 2|x - 1|$ と $y = x + 3$ の x 座標に等しいから, グラフより

$$-3x + 2 = x + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{4}$$

$$3x - 2 = x + 3 \quad \therefore x = \frac{5}{2}$$

以上より, $x = -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$

別解 次のように場合分けして解いてもよい。

(i) $x \leq 0$ のとき

$$-x - 2(x - 1) = x + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{4} \text{ (適する)}$$

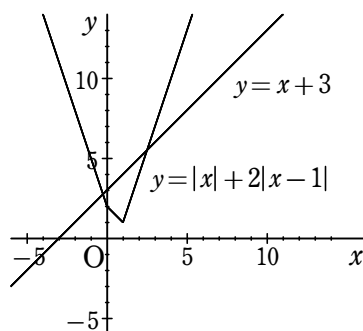
(ii) $0 < x \leq 1$ のとき

$$x - 2(x - 1) = x + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{2} \text{ (不適)}$$

(iii) $1 < x$ のとき

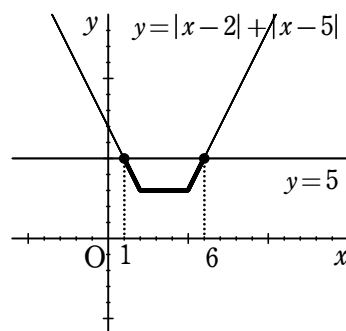
$$x + 2(x - 1) = x + 3 \quad \therefore x = \frac{5}{2} \text{ (適する)}$$

(i) ~ (iii) より $x = -\frac{1}{4}, \frac{5}{2}$



$$(2) |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -(x-2) & (x < 2) \end{cases} \quad |x-5| = \begin{cases} x-5 & (x \geq 5) \\ -(x-5) & (x < 5) \end{cases}$$

	2	5	
$ x-2 $	$-(x-2)$	$x-2$	$x-2$
$ x-5 $	$-(x-5)$	$-(x-5)$	$x-5$
$ x-2 + x-5 $	$-2x+7$	3	$2x-7$



$|x-2|+|x-5| \leq 5$ の解は、

$y=|x-2|+|x-5|$ の y 座標が $y=5$ の y 座標以下となっている x の範囲であるから、

グラフより

$$1 \leq x \leq 6$$

別解 次のように場合分けして解いてもよい。

(i) $x < 2$ のとき

$$-(x-2)-(x-5) \leq 5 \quad \therefore x \geq 1$$

$$x < 2 \text{ より } 1 \leq x < 2$$

(ii) $2 \leq x < 5$ のとき

$$x-2-(x-5) \leq 5 \quad \therefore x \text{ はすべての実数}$$

$$2 \leq x < 5 \text{ より } 2 \leq x < 5$$

(iii) $5 \leq x$ のとき

$$x-2+x-5 \leq 5 \quad \therefore x \leq 6$$

$$5 \leq x \text{ より } 5 \leq x \leq 6$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より } 1 \leq x \leq 6$$

補2

(1) 方程式 $||x-4|-3|=2$ の解は全部で ア 個あり，そのうち絶対値が最も小さい解は イ である。

(2) 不等式 $||x-1|-5|<3$ を満たす整数 x は 個ある。

解説

$$(1) ||x-4|-3|=2$$

$$\Leftrightarrow |x-4|-3=\pm 2$$

$$\Leftrightarrow |x-4|=5, 1$$

$$\Leftrightarrow x-4=\pm 5, \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x=-1, 3, 5, 9$$

解は ア 4 個。絶対値が最も小さい解は イ -1

別解

まず， $x \geq 4$ と $x < 4$ で場合分けをして，内側の絶対値を外してから解く。

$$(2) ||x-1|-5|<3$$

$$\Leftrightarrow -3 < |x-1|-5 < 3$$

$$\Leftrightarrow 2 < |x-1| < 8$$

$$\Leftrightarrow 2 < |x-1| \text{ かつ } |x-1| < 8$$

$$\Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ または } 2 < x-1) \text{ かつ } -8 < x-1 < 8$$

$$\Leftrightarrow (x < -1 \text{ または } 3 < x) \text{ かつ } -7 < x < 9$$

$$\Leftrightarrow -7 < x < -1, 3 < x < 9$$

これを満たす整数 x は 10 個

別解

$$2 < |x-1| < 8$$

$$\Leftrightarrow -8 < x-1 < -2 \text{ または } 2 < x-1 < 8$$

$$\Leftrightarrow -7 < x < -1 \text{ または } 3 < x < 9$$

補3

方程式 $3|x+2|=|2x-1|$ を解け.

不等式 $|3x+2|<|2x-3|$ を解け.

解説

$$|A|=|B|\Leftrightarrow A^2=B^2$$

$$|A|<|B|\Leftrightarrow A^2<B^2$$

が成り立ちます。 $|A|\geq 0, |B|\geq 0$ であるから、 $a\geq 0, b\geq 0$ のとき、
 $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2, a<b\Leftrightarrow a^2<b^2$ が成り立つことから明らかです。

$$(1) 3|x+2|=|2x-1|$$

$$\Leftrightarrow 3^2(x+2)^2=(2x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3^2(x+2)^2-(2x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \{3(x+2)+(2x-1)\}\{3(x+2)-(2x-1)\}=0$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)(x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-7, -1$$

別解 場合分けをして絶対値を外してから解く。

$$(2) |3x+2|<|2x-3|$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)^2<(2x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)^2-(2x-3)^2<0$$

$$\Leftrightarrow \{(3x+2)+(2x-3)\}\{(3x+2)-(2x-3)\}<0$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)(x+5)<0$$

$$\Leftrightarrow -5<x<\frac{1}{5}$$

補4

(1) $y=1-|x-1|$ のグラフをかけ. また, x に関する方程式 $|1-|x-1||=c$ が 4 つの解をもつための実数 c の値の範囲を求めよ.

(2) x の関数 $f(x)=||x-1|-x|$ について, $f(0)=$ であり, $f(x)=0$ の解は $x=$ である。 xy 平面において, $y=f(x)$ のグラフ C と $y=mx$ の定める直線 ℓ が共有点をもつような m の値の範囲は であり, 異なる 3 点で交わるような m の値の範囲は である。また, C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつとき, C と ℓ で囲まれる部分の面積は となる。

解説

$$(1) y=1-|x-1|=\begin{cases} 1-(x-1)=-x+1 & (x\geq 1) \\ 1+(x-1)=x & (x<1) \end{cases}$$

より, 求めるグラフは右図。

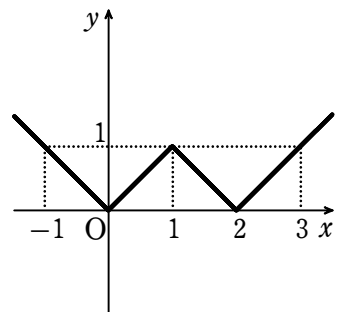
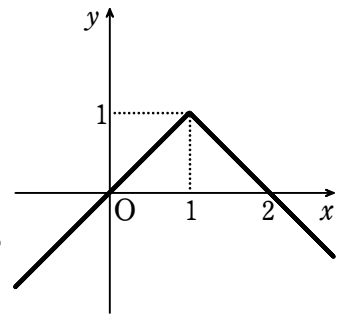
x に関する方程式 $|1-|x-1||=c \cdots \textcircled{1}$ の解は, $y=|1-|x-1||$ と直線 $y=c$ との共有点の x 座標に等しいから, $\textcircled{1}$ が 4 つの解をもつためには $y=|1-|x-1||$ と直線 $y=c$ が 4 つの共有点をもてばよい。

$y=|1-|x-1||$ のグラフは,

$y=1-|x-1|$ のグラフの $y<0$ の部分を

x 軸に関して対称に折り返したものであるから
右のグラフより

$$0 < c < 1$$



$$(2)(ア) f(0) = ||0-1|-0| = |-1| = 1$$

$$(イ) ||x-1|-x| = 0$$

$$|x-1|-x=0$$

$$|x-1|-x = \begin{cases} (x-1)-x = -1 & (x \geq 1) \\ -(x-1)-x = -2x+1 & (x < 1) \end{cases}$$

より,

$x \geq 1$ のとき, 解なし

$x < 1$ のとき,

$$-2x+1=0 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \text{ (適する)}$$

$$\text{よって, } x = \frac{1}{2}$$

(ウ) $y=f(x)$ のグラフは, $y=|x-1|-x$ のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸に関して対称に折り返したものであるから, 図のようになる。

C と ℓ が共有点をもつとき, グラフより, $m \geq 0, m < -2$

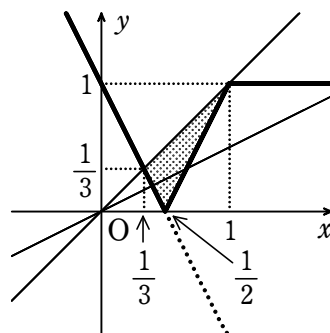
(エ) C と ℓ が異なる 3 点で交わるとき, グラフより, $0 < m < 1$

(オ) C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつのは,

$m=1$ のときである。

求める面積を S とすると, グラフより

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{6}$$



補5

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \text{ とする。}$$

(1) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $f(x)$ の値を求めよ。

(2) $x = \frac{2a}{a^2+1}$ (ただし, $a > 1$) のとき $f(x)$ をできるだけ簡単な式で書け。

解説

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \frac{1+x+2\sqrt{(1+x)(1-x)}+1-x}{1+x-(1-x)} \\ &= \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2x} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$(1) f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

(2) $x = \frac{2a}{a^2+1}$ のとき

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a^2+1)^2-4a^2}{(a^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{a^4-2a^2+1}{(a^2+1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}} = \frac{|a^2-1|}{a^2+1} \end{aligned}$$

$a > 1$ であるから, $a^2-1 > 0$ より

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

よって

$$f\left(\frac{2a}{a^2+1}\right) = \frac{1+\frac{a^2-1}{a^2+1}}{\frac{2a}{a^2+1}} = \frac{a^2+1+a^2-1}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$$