

発展問題演習 7. 数列

□

$$n, \dots, n+m-1 \quad (m \geq 2)$$

I. (1) n から連続する m 個の自然数の和が 2020 となる

$$\frac{m(2n+m-1)}{2} = 2020$$

$$m(2n+m-1) = 4040$$

$$2^3 \cdot 5 \cdot 101$$

$m < 2n+m-1$, m と $2n+m-1$ の1因子に異なり

m	5	8	40
$2n+m-1$	808	505	101
n	402	249	91

よって

$$402 + \dots + 406$$

$$249 + \dots + 256$$

$$91 + \dots + 100$$

(2) n から連続する 3 個の自然数の和が 2^a となる

$$\frac{m(2n+m-1)}{2} = 2^a$$

$$m(2n+m-1) = 2^{a+1}$$

$m < 2n+m-1$, m と $2n+m-1$ の1因子に異なり

よって m は 2^a の約数である

よって m は 2^a の約数である

(3) 同様にして

$$\frac{m(2n+m-1)}{2} = 2^a(2b+1)$$

$$m(2n+m-1) = 2^{a+1}(2b+1)$$

$$2^{a+1} < 2b+1$$

$$m = 2^{a+1}, 2n+m-1 = 2b+1$$

$$\therefore m = 2^{a+1} - 2^a \geq 1$$

$$2^{a+1} > 2b+1$$

$$(2^a < 2b+1)$$

$$m = 2b+1, 2n+m-1 = 2^{a+1}$$

$$\therefore m = 2^a - 2^{a-1} \geq 1 \quad (2^a > 2^{a-1})$$

よって m は 2^a の約数である

よって m は 2^a の約数である

II. (1) n から m までの自然数の和

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

よって $n(n+1)$ は 2 の倍数である

$n, n+1$ の一方は 2 の倍数である

$n, n+1$ の一方は 4 の倍数である

$$n = 4k \text{ or } n+1 = 4k$$

$$\therefore n = 4k, 4k-1 \quad (k = \text{自然数})$$

$$(2) n = 4k-1$$

$$a_n = n \quad (n = 1, 2, \dots, 4k-1)$$

$$a_\ell \text{ と } a_{4k-\ell+1} \text{ について } a_\ell + a_{4k-\ell+1} = 4k$$

$$a_\ell + a_{4k-\ell+1} = 4k$$

よって a_ℓ と $a_{4k-\ell+1}$ は $2k$ の倍数である

よって a_ℓ は $2k$ の倍数である

$$a_n = 4k-1$$

$$a_n = n \quad (n = 1, 2, \dots, 4k-1)$$

$$a_{4k-\ell+1} \text{ と } a_\ell \text{ の和は } 4k$$

$$a_\ell \text{ と } a_{4k-\ell+1} \text{ について } a_\ell + a_{4k-\ell+1} = 4k$$

$$a_\ell + a_{4k-\ell+1} = 4k$$

よって a_ℓ と $a_{4k-\ell+1}$ は $2k$ の倍数である

よって a_ℓ は $2k$ の倍数である

$$a_n = 4k-1$$

<proof>

1. 自然数の列 a_n の和

(2)

$$2, 4, 8, \dots \in \{a_n\}$$

$$3, 9, 27, \dots \in \{a_n\}$$

$$a_n = 2^n, a_n = 3^n$$

$$2^n = 3^m, n+m = 1000$$

よって a_n は 2 の倍数である

$$n \log_2 2 = m \log_2 3$$

$$(n+m) \log_2 2 = m$$

$$\therefore m = 1000 \log_2 2 \approx 386.852 \dots$$

[5]

d) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k$ 満たす

領域は1辺の斜率部

たに2点を含む。

$0 \leq k$ はこの領域の4つの
格子点の1個であるから

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \left\{ \text{[図: 正方形と三角形の和]} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \{ (2k+1)(2k+1) + k+1 \} \\ &= 3k^2 + 2k + 1 \end{aligned}$$

e) $2 = l$ ($0 \leq l \leq n$) に対して格子点の個数は

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + l &\leq n \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} &\leq n-l \end{aligned}$$

4. $0 \leq k \leq n-l$ となる

∴

$$3(n-l)^2 + 3(n-l) + 1$$

∴

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=0}^n \{ 3(n-l)^2 + 3(n-l) + 1 \} \\ &= \sum_{m=0}^n (3m^2 + 3m + 1) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2} (n+1) \{ 3n(2n+1) + 3n+2 \} \\ &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

<point>

1. 格子点の個数

[6]

a) $2^{10} < 2016 < 2^{11}$ ∴

$$0 < \log_2 2016 < 11$$

∴ $a_{2016} = \boxed{10}$

a) $a_n = k$ と $1 \leq k \leq 3$ (それぞれ)

$$k \leq a_n < k+1$$

$$k \leq \log_2 n < k+1$$

$$\therefore 2^k \leq n < 2^{k+1}$$

∴ k 満たす n は

$$2^{k+1} - 2^k = 2^k \text{ 個ある}$$

そのうち $k=2$ の n は $n = \boxed{2^{k+1} - 1}$

b) $\sum_{k=1}^{2016} a_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 10 \cdot 2^{11} - 10 \cdot 2^0$ 2017-2017

∴

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 10 \cdot 2^{11} \text{ とおす}$$

$$-) 2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + 9 \cdot 2^{11} + 10 \cdot 2^{12}$$

$$-S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11} - 10 \cdot 2^{11}$$

$$= \frac{2(2^{11}-1)}{2-1} - 10 \cdot 2^{11}$$

$$= -9 \cdot 2^{11} - 2$$

$$\therefore S = 9 \cdot 2^{11} + 2 = 18434$$

∴

$$\sum_{k=1}^{2016} a_k = \boxed{18434}$$

[別解]

$\sum_{k=1}^{2016} a_k$ は $a_k \leq \log_2 n$, $0 \leq n \leq 2016$, $a_k > 0$

の領域の4つの格子点の個数を数える

[7]

a) $\sum_{k=1}^{15} a_k = 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 = 34$

b) $a_k = m$ と $1 \leq k \leq 3$

$$m \leq \sqrt{k} < m+1$$

$$m^2 \leq k < (m+1)^2$$

∴ k 満たす k の個数は

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m+1 \text{ 個}$$

c) $1, 1, 1 / 2, 2, 2, 2, \dots$

第1項 第2項 ... とする

第 n 項の最後の2位は

$$\frac{n}{2}(3+2n+1) = n(n+2) \text{ 第 } n(n+2) \text{ 位}$$

a_{1000} は第 n 項の何位とすると

$$(n-1)(n+1) \leq 1000 \leq n(n+2)$$

$$90 \cdot 92 = 960, 91 \cdot 93 = 1029 \text{ より}$$

a_{1000} は第91項の40番目の位であるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1000} a_k &= \sum_{k=1}^{90} n(n+2) + 91 \times 40 \\ &= 2 \cdot \frac{90 \cdot 91 \cdot 61}{6} + \frac{30 \cdot 91}{2} + 91 \cdot 40 \\ &= 91 \times (610 + 15 + 40) = 20615 \end{aligned}$$

[別解]

$$\sum_{k=1}^n a_k \text{ は } \sqrt{x} \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1000, \sqrt{x} > 0.$$

の整数範囲の格子点を1個単位で数える

[8]

$$f(n) = 5^n + a \cdot n + b \text{ とおく.}$$

$$f(1) = a + b + 5 \dots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 2a + b + 25 \dots \textcircled{2}$$

$f(1), f(2)$ ともに16の倍数と仮定する

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$f(2) - f(1) = a + 20$$

$f(2) - f(1)$ も16の倍数であり

$$0 < a \leq 16 \text{ より } a = 12.$$

$\textcircled{1}$ より

$$f(1) = b + 17$$

$f(1)$ は16の倍数であり

$$0 < b \leq 16 \text{ より } b = 15 \text{ であることが必要}$$

これは与えられた n で成り立つことを示す

(i) $n=1$ のとき

$$f(1) = 12 + 15 + 5 = 2 \cdot 16 \text{ より成り立つ}$$

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定して

$$5^k + 12k + 15 = 16N \quad (N: \text{整数})$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$5^{k+1} + 12(k+1) + 15$$

$$= 5 \cdot 5^k + 12k + 27$$

$$= 5(5^k + 12k + 15) - 48k - 48$$

$$= 5 \cdot 16N - 16(3k+3)$$

$$= 16(5N - 3k - 3)$$

よって成り立つ

(1) (ii) から数学的帰納法より

$$f(n) = 5^n + 12n + 15 \text{ は与えられた } n \text{ で } 16 \text{ の倍数である}$$

よって

$$a = 12, b = 15$$

<point>

1. 複素数表示法 (1段階)

[9]

$$d) \cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta \text{ は}$$

$$\alpha + \beta \quad \alpha - \beta$$

$$\alpha = (n+1)\theta, \beta = \theta$$

$$e) \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \text{ より}$$

$$T_2(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$T_3(\cos\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(3) (i) $n=1, 2$ のとき

$$T_1(\cos\theta) = \cos\theta, T_2(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \text{ と成り立つ}$$

$\cos(n+2)\theta = T_{n+2}(\cos\theta)$ と仮定して

$$n = k+2 \text{ のとき成り立つことを示す}$$

(i) より

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$$

と成り立つ。 $T_{n+1}(\cos\theta), T_n(\cos\theta)$ はそれぞれ $k+1, k$ 次の

$T_{n+2}(\cos\theta)$ は $k+2$ 次の整式であるから

よって成り立つ

(1) (ii) から数学的帰納法より

成り立つことが示される

$$(4) \theta = \frac{\pi}{4k} \text{ とおく}$$

$\cos\theta$ が有理数であると仮定する

$$\cos k\theta = T_k(\cos\theta)$$

$$T_k(\cos\theta) \text{ は有理数であるから } \cos k\theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(無条件) とおき矛盾

よって $\cos \frac{\pi}{4k}$ は無理数である

10

$$d) \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad \text{II}$$

($k=1, 2, \dots$)

2) $n=2k$ とする (偶数個の項)
($n=2k+1$ とする (奇数個の項))

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 \cdots a_k} \sqrt{a_{k+1} \cdots a_{2k}} &\leq \sqrt{a_1 \cdots a_k + a_{k+1} \cdots a_{2k}} \\ &\leq \frac{\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{k}}{2} \quad (\text{仮定より}) \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{2k}}{2k} \end{aligned}$$

よって証明

$$3) \sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_{k+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}}{k+1}$$

$$a_{k+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \quad \text{と仮定}$$

($k=1$)

$$\sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_k} \sqrt[k]{\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}$$

$$\sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_k} \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\text{両辺} \frac{k+1}{k} \text{乗して}$$

$$\sqrt[k+1]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \quad \text{II}$$

3.5

この不等式は、数学的帰納法で証明できる。

後述の例題